INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIII. BAND ERSTES HEFT 1955

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 9,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnerstr. 12
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einsenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2440

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 249251

Inhalt:

Seite

Reidelbach, W., Die Relativbewegung der Schlagkugeln im Taumelscheibenrüttler. Mit 10 Textabbildungen 1

Marquard, E., Zur Berechnung von Brückenschwingungen unter rollenden Lasten. Mit 10 Textabbildungen 19

Link, H., Über den Kreisringträger mit begrenzter Verformung bei überkritischem Außendruck. Mit 14 Textabbildungen 36

Zoller, K., Wärmespannungen beim Anheizen von Kesseltrommeln. Mit 8 Textabbildungen 51

Jung, H., Über eine Anwendung der *Hill*schen Minimalbedingung in der Plastizitätstheorie. Mit 1 Textabbildung 61

INGENIEUR-ARCHIV

XXIII. BAND ERSTES HEFT 1955

Die Relativbewegung der Schlagkugeln im Taumelscheibenrüttler*.

Von W. Reidelbach.

1. Einführung. a) Der zur Betonverdichtung bestimmte Rüttler besteht im Prinzip aus einer Z-förmigen Kurbelwelle und einer kreisförmigen Taumelscheibe, die gleichmäßig über den Umfang verteilte Röhren trägt (Abb. 1). Durch Drehung der Kurbelwelle bei gleichzeitiger Führung eines Scheibendurchmessers in einer Ebene, die durch die Drehachse der Kurbelwelle geht, werden Taumelscheibe und Röhren in eine eigentümlich schwingende Bewegung versetzt mit dem Zweck, die in jeder Röhre eingeschlossene Kugel zwischen den Röhrendeckeln hin und her zu schleudern und durch die Stöße zwischen Kugeln und Deckeln den zu verdichtenden Beton zu erschüttern. Die Bildebene der Abb. 1 liegt in der Führungsebene des gefesselten Scheibendurchmessers; es sind nur zwei Röhren eingezeichnet.

Bredschneider[1] hat die Periodizität und Frequenz der Stöße auf Grund einer genäherten Darstellung der Kugelbewegung zum Zwecke der konstruktiven Auswertung graphisch untersucht, jedoch keine strenge Theorie der Kugelbewegung entwickelt. Die vorliegende Arbeit bringt die Ableitung der strengen Bewegungsgleichungen und soweit als möglich auch eine genaue oder genäherte Integration bis zur expliziten Darstellung der Kugelbewegung.

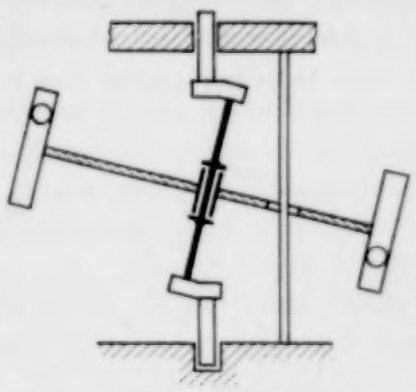

Abb. 1. Der Taumelscheibenrüttler in schematischer Darstellung.

b) Die Eigenbewegung der Erde darf hier wie bei den meisten kinetischen Problemen der Maschinentechnik vernachlässigt und der erdfeste Raum, in dem der Rüttler aufgestellt ist, als Inertialsystem angesehen werden. Die Rotation einer Kugel um ihren Schwerpunkt bleibe zunächst unbeachtet. Die absolute Bewegung eines Kugelschwerpunktes erfolgt längs einer Raumkurve; ihre analytische Darstellung erfordert daher drei Gleichungen. Die relative Schwerpunktsbewegung bezüglich eines auf der Taumelscheibe fixierten Bezugssystems („Fahrzeugraum" oder kurz „Fahrzeug") ist an die Achse der Führungsröhre gebunden, also geradlinig und in einer einzigen Gleichung darstellbar, woraus hervorgeht, daß die Beschreibung der relativen Kugelbewegung wesentliche Vorteile bietet.

c) Die allgemeinen dynamischen Grundgleichungen der Relativbewegung eines starren Körpers sind bekannt und sowohl in Vektorform[2, 4, 5, 6] wie in Motorform[3, 4, 5] mehrfach entwickelt worden. Man findet auch Anfänge einer Darstellung des Systems expliziter Differentialgleichungen für die Komponenten der relativen Schwerpunktsgeschwindigkeit und der relativen Drehgeschwindigkeit eines starren Körpers[3, 7]. Die Anwendbarkeit dieser Gleichungen ist allerdings auf Fälle spezieller Fahrzeugbewegungen (z. B. Drehung um eine raumfeste Achse mit konstanter Drehgeschwindigkeit) beschränkt. Gerade bei technischen Problemen sind jedoch viel allgemeinere Bewegungszustände durchaus anzutreffen. Auch bilden die häufig verwendeten Schwerpunktshauptachsen nicht immer das geeignetste Bezugssystem.

---

* Dissertation Karlsruhe 1953, Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. *R. Sonntag*, Korreferent: Prof. *K. v. Sanden*.

[1] *K. Bredschneider*, Grundlegende Untersuchungen über die Kugelwege im Taumelscheibenrüttler. Dissertation, Karlsruhe 1950.

[2] *K. Heun*, Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik. Enzykl. d. math. Wiss. IV, 2 S. 438.

[3] *R. v. Mises*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924), S. 196.

[4] *M. Winkelmann* und *R. Grammel*, Die Relativbewegung des starren Körpers auf der bewegten Erde. Handb. d. Physik Bd. V, S. 446.

[5] *K. Magnus*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 336.

[6] *E. Hölder*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 166.

[7] *A. Föppl*, Vorlesungen über Technische Mechanik Bd. VI. 5. Auflage, §§ 8 und 9.

d) Es erscheint daher notwendig, ein ganz allgemeines System von expliziten Differentialgleichungen aufzustellen und dabei folgende Bedingungen zu beachten:

α) Der Bezugspunkt der Relativbewegung und der Reduktionspunkt der äußeren Kräfte sollen beide in den Schwerpunkt S oder in einen im Fahrzeug dauernd ruhenden Punkt des starren Körpers fallen. Er sei zugleich Ursprung eines körperfesten Bezugssystems.

β) Der Bezugspunkt für die Bewegung des geführten, fahrzeugfesten Bezugssystems sei dessen Ursprung. Er werde in einen ausgezeichneten Punkt des Fahrzeugraumes gelegt, etwa in einen im Inertialsystem festen oder in denjenigen Fahrzeugpunkt, in dem der starre Körper während der Relativbewegung gegebenenfalls festgehalten wird. Er ist im allgemeinen mit dem unter α genannten Bezugspunkt nicht identisch.

γ) Die Trägheitseigenschaften des starren Körpers sollen explizit durch seine Masse sowie seine Trägheits- und Deviationsmomente ausgedrückt werden.

Diese Forderungen entspringen dem Wunsche, gewisse natürliche Gegebenheiten zu berücksichtigen (Bedingung α und β) und die Gleichungen so zu gestalten, daß sie ohne jede weitere Umformung unmittelbar angewendet werden können (Bedingung γ). Sie sollen hier mit den in der technischen Mechanik üblichen, einfachen Hilfsmitteln abgeleitet und dadurch auch der Praxis näher gebracht werden.

2. Die dynamischen Grundgleichungen der Relativbewegung. a) Es sei $\mathfrak{u}$ die absolute Drehgeschwindigkeit des Fahrzeugs, $\mathfrak{v}_0$ die absolute Translationsgeschwindigkeit seines Ursprungs 0, $\mathfrak{o}$ die relative und $\mathfrak{w} = \mathfrak{u} + \mathfrak{o}$ die absolute Drehgeschwindigkeit des starren Körpers. Es sollen ferner zeitliche Änderungen irgend eines Vektors $\mathfrak{r}$ innerhalb des Inertialsystems durch Sterne ($\overset{*}{\mathfrak{r}}$), Änderungen innerhalb des Fahrzeugs durch Punkte ($\dot{\mathfrak{r}}$), Änderungen innerhalb des körperfesten Bezugssystems durch Ringe ($\overset{\circ}{\mathfrak{r}}$) gekennzeichnet werden. Dann gelten die Transformationsformeln

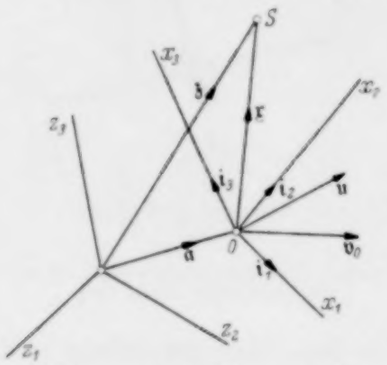

Abb. 2. Zur Relativbewegung des Schwerpunktes eines starren Körpers.

$$\overset{*}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r} + \dot{\mathfrak{r}}\,, \tag{1}$$

$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{o} \times \mathfrak{r} + \overset{\circ}{\mathfrak{r}}\,, \tag{2}$$

$$\overset{*}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{r} + \overset{\circ}{\mathfrak{r}}\,. \tag{3}$$

Wird die augenblickliche Lage des Schwerpunktes S des starren Körpers im Inertialsystem (z_1, z_2, z_3) durch den Ortsvektor $\mathfrak{z}$, seine Lage im Fahrzeug (x_1, x_2, x_3) durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ und der Ursprung 0 des fahrzeugfesten Systems durch den Ortsvektor $\mathfrak{a}$ angegeben (Abb. 2), so ist stets $\mathfrak{z} = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}$. Wegen $\overset{*}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{v}_0$, $\overset{**}{\mathfrak{a}} = \overset{*}{\mathfrak{v}}_0$ erhält man als absolute Beschleunigung des Schwerpunktes S

$$\overset{**}{\mathfrak{z}} = \overset{*}{\mathfrak{v}}_0 + \overset{**}{\mathfrak{x}}\,. \tag{4}$$

$\dot{\mathfrak{x}}$ und $\ddot{\mathfrak{x}}$ bedeuten die relative Geschwindigkeit und die relative Beschleunigung des Schwerpunktes.

Gleichung (1) liefert speziell

für $\mathfrak{r} = \mathfrak{u}$
$$\overset{*}{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{u} + \dot{\mathfrak{u}} = \dot{\mathfrak{u}}\,, \tag{5}$$

für $\mathfrak{r} = \mathfrak{x}$
$$\overset{*}{\mathfrak{x}} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\,, \tag{6}$$

für $\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{x}}$
$$\overset{*}{\dot{\mathfrak{x}}} = \mathfrak{u} \times \dot{\mathfrak{x}} + \ddot{\mathfrak{x}}\,. \tag{7}$$

Führt man in (4) den Differentialquotienten von (6)

$$\overset{**}{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{u}} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{u} \times \overset{*}{\mathfrak{x}} + \overset{*}{\dot{\mathfrak{x}}}$$

ein und verwendet dabei (5), (6) und (7), so entsteht aus (4) die bekannte Darstellung der absoluten Beschleunigung als Summe von Führungs-, Coriolis- und Relativbeschleunigung:

$$\overset{**}{\mathfrak{z}} = \overset{*}{\mathfrak{v}}_0 + \dot{\mathfrak{u}} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{x}) + 2\,\mathfrak{u} \times \dot{\mathfrak{x}} + \ddot{\mathfrak{x}}\,. \tag{8}$$

b) Bezeichnet $\mathfrak{P}$ die Resultierende der äußeren Kräfte, m die Masse des starren Körpers, so gilt im Inertialsystem der Schwerpunktsatz

$$m\,\overset{**}{\mathfrak{z}} = \mathfrak{P}\,.$$

Bei Verwendung von (8) geht daraus die erste dynamische Grundgleichung der Relativ-

bewegung

$$m\,[\ddot{\mathfrak{x}} + 2\,\mathfrak{u} \times \dot{\mathfrak{x}} + \overset{*}{\mathfrak{v}}_0 + \dot{\mathfrak{u}} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{x})] = \mathfrak{P} \tag{9}$$

hervor. Werden die in (9) angeschriebenen Vektoren mit Hilfe der drei Grundvektoren eines fahrzeugfesten, kartesischen Kreuzes $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ jeweils als Summe dreier Komponenten in den Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{i}_1 x_1 + \mathfrak{i}_2 x_2 + \mathfrak{i}_3 x_3\,, \qquad \dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{i}_1 \dot{x}_1 + \mathfrak{i}_2 \dot{x}_2 + \mathfrak{i}_3 \dot{x}_3, \qquad \ddot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{i}_1 \ddot{x}_1 + \mathfrak{i}_2 \ddot{x}_2 + \mathfrak{i}_3 \ddot{x}_3,$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}_1 u_1 + \mathfrak{i}_2 u_2 + \mathfrak{i}_3 u_3\,, \qquad \dot{\mathfrak{u}} = \mathfrak{i}_1 \dot{u}_1 + \mathfrak{i}_2 \dot{u}_2 + \mathfrak{i}_3 \dot{u}_3\,,$$

$$\overset{*}{\mathfrak{v}}_0 = \mathfrak{i}_1 \overset{*}{v}_1 + \mathfrak{i}_2 \overset{*}{v}_2 + \mathfrak{i}_3 \overset{*}{v}_3, \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{i}_1 P_1 + \mathfrak{i}_2 P_2 + \mathfrak{i}_3 P_3\,,$$

dargestellt, wobei $\overset{*}{v}_\nu = \overset{*}{\mathfrak{v}}_0 \cdot \mathfrak{i}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ sein soll und nicht mit $(\mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{i}_\nu)^*$ verwechselt werden darf, so ergeben sich aus der Vektordifferentialgleichung (9) für $\mathfrak{x}$ die folgenden simultanen Differentialgleichungen für die Schwerpunktskoordinaten x_1, x_2, x_3:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 - 2\,u_3\,\dot{x}_2 + 2\,u_2\,\dot{x}_3 + \overset{*}{v}_1 - (u_2^2 + u_3^2)\,x_1 + (u_1\,u_2 - \dot{u}_3)\,x_2 + (u_1\,u_3 + \dot{u}_2)\,x_3 = \frac{P_1}{m}\,,\\
&\ddot{x}_2 - 2\,u_1\,\dot{x}_3 + 2\,u_3\,\dot{x}_1 + \overset{*}{v}_2 - (u_3^2 + u_1^2)\,x_2 + (u_2\,u_3 - \dot{u}_1)\,x_3 + (u_2\,u_1 + \dot{u}_3)\,x_1 = \frac{P_2}{m}\,,\\
&\ddot{x}_3 - 2\,u_2\,\dot{x}_1 + 2\,u_1\,\dot{x}_2 + \overset{*}{v}_3 - (u_1^2 + u_2^2)\,x_3 + (u_3\,u_1 - \dot{u}_2)\,x_1 + (u_3\,u_2 + \dot{u}_1)\,x_2 = \frac{P_3}{m}\,,
\end{aligned}\right| \tag{10}$$

die durch zyklische Vertauschung der Indizes auseinander hervorgehen. Ihre Integrale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ geben unmittelbar die relative Lage des Schwerpunktes im Fahrzeugraum als Funktion der Zeit t an.

Da in (10) alle Größen auf die fahrzeugfesten Koordinatenachsen x_1, x_2, x_3 bezogen sind, müssen die Ursprungsbeschleunigung $\overset{*}{\mathfrak{v}}_0$ und die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Fahrzeuges, die man natürlicherweise zunächst im Inertialsystem bestimmt, in das geführte Bezugssystem transformiert werden. Wegen $\overset{*}{\mathfrak{u}} = \dot{\mathfrak{u}}$ ist es gestattet, die Drehbeschleunigung $\dot{\mathfrak{u}}$ durch Differentiation der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ im Fahrzeuge zu berechnen. Es ist dagegen nicht zulässig, den transformierten Vektor $\mathfrak{v}_0$ im Fahrzeug zu differenzieren. Man würde dadurch $\dot{\mathfrak{v}}_0$, nicht aber $\overset{*}{\mathfrak{v}}_0$ erhalten. Hier muß $\mathfrak{v}_0$ zunächst im Inertialsystem differenziert und dann transformiert werden.

Zerlegt man alle Vektoren von (9) im Inertialsystem, so entstehen Differentialgleichungen, die mit (10) formal vollkommen identisch sind. Die Transformation von $\overset{*}{\mathfrak{v}}_0$ und $\mathfrak{u}$ ist dann zwar nicht notwendig, jedoch sind dann die Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$ bezüglich des Inertialsystems und müssen nachträglich in das geführte Bezugssystem transformiert werden, wenn man die relative Schwerpunktslage darstellen will. Im allgemeinen wird bei der Anwendung von (9) die Zerlegung der Vektoren im Fahrzeugraum, also die erste Methode, vorteilhafter sein.

Bei gleichförmiger Rotation des Fahrzeuges um eine raumfeste Achse durch 0 ist $\mathfrak{v}_0 = 0$, $\overset{*}{\mathfrak{v}}_0 = 0$, $\dot{\mathfrak{u}} = 0$. Dann lautet die erste Gleichung (10)

$$\ddot{x}_1 - 2\,u_3\,\dot{x}_2 + 2\,u_2\,\dot{x}_3 + u_2\,(u_1\,x_2 - u_2\,x_1) - u_3\,(u_3\,x_1 - u_1\,x_3) = \frac{P_1}{m}\,.$$

Man erkennt in $(u_3\,x_1 - u_1\,x_3)$ die zweite, in $(u_1\,x_2 - u_2\,x_1)$ die dritte Komponente der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a = \mathfrak{u} \times \mathfrak{x}$ desjenigen fahrzeugfesten Punktes, der im Augenblick mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Beurteilt man die Änderung der Relativgeschwindigkeit des Schwerpunktes von einem körperfesten Bezugssystem aus, dann muß $\ddot{\mathfrak{x}}$ nach (2) durch die Summe $\mathfrak{o} \times \dot{\mathfrak{x}} + \overset{\circ}{\ddot{\mathfrak{x}}}$ ersetzt werden, die mit $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{v}_r$ auch $\mathfrak{o} \times \mathfrak{v}_r + \overset{\circ}{\mathfrak{v}}_r$ geschrieben werden kann. An die Stelle der ersten Komponente $\ddot{x}_1$ tritt dann der Ausdruck $o_2\,v_{r3} - o_3\,v_{r2} + \overset{\circ}{v}_{r1}$, so daß die letzte Gleichung nunmehr die Form

$$\overset{\circ}{v}_{r1} + o_2\,v_{r3} - o_3\,v_{r2} + u_2\,v_{a3} - u_3\,v_{a2} + 2\,u_2\,v_{r3} - 2\,u_3\,v_{r2} = \frac{P_1}{m}$$

bekommt und jetzt (bis auf die verwendeten Buchstaben) vollständig mit der von *v. Mises* angegebenen Komponentengleichung[1] übereinstimmt.

[1] A. a. O. S. 197, Gl. (17a).

c) Die Drehbewegung des starren Körpers beherrscht der Drallsatz, der mit dem Begriff des statischen Moments verknüpft ist und dessen Form daher von der Wahl des Momentenbezugspunktes abhängt.

Bezeichnet $\mathfrak{r}$ jetzt den Ortsvektor eines Massenpunkts *dm* des starren Körpers in bezug auf den Ursprung des Inertialsystems, $\mathfrak{r}'$ den Ortsvektor von *dm* in bezug auf irgend einen, auch bezüglich irgend eines der drei betrachteten Räume (Inertialsystem, Fahrzeug, starrer Körper) beliebig bewegten Bezugspunkt 0 und $\mathfrak{r}_0$ den absoluten, beliebig veränderlichen Ortsvektor des Bezugspunktes 0 (Abb. 3), so ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}'$ und die absolute Geschwindigkeit des Massenpunktes $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}_0 + \dot{\mathfrak{r}}' = \mathfrak{v}_0 + \dot{\mathfrak{r}}'$, wenn $\mathfrak{v}_0 = \dot{\mathfrak{r}}_0$ die absolute Geschwindigkeit des Bezugspunktes 0 darstellt. Für den Körperschwerpunkt gilt $\mathfrak{r}_s = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_s'$, $\mathfrak{v}_s = \dot{\mathfrak{r}}_s = \dot{\mathfrak{r}}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_s' = \mathfrak{v}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_s'$.

Aus dem *Newton*schen Grundgesetz für den Massenpunkt

$$dm\,\dot{\mathfrak{v}} = d\mathfrak{p} + d\mathfrak{j}$$

($d\mathfrak{p}$ = Summe der bezüglich des starren Körpers äußeren Kräfte, $d\mathfrak{j}$ = Summe der inneren Kräfte am Massenpunkt *dm*) folgt, wenn man das Wechselwirkungsgesetz für die inneren

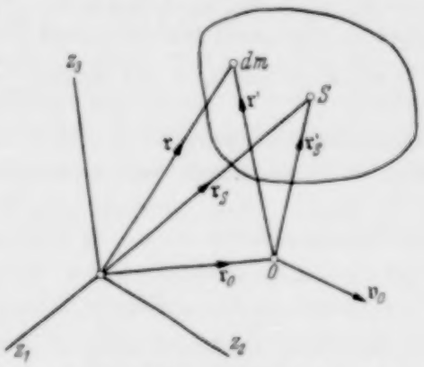

Abb. 3. Zur Ableitung des Drallsatzes für einen beliebig bewegten Bezugspunkt.

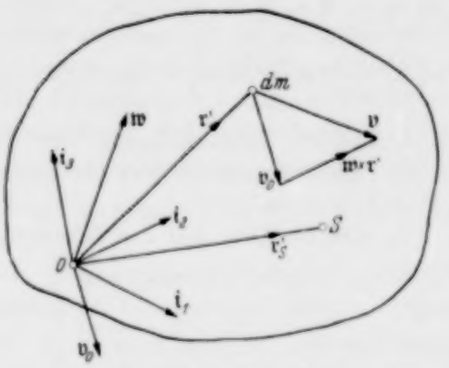

Abb. 4. Zur Ableitung des Drallsatzes für einen körperfesten Bezugspunkt.

Kräfte beachtet und über die kontinuierlich verteilte Masse des starren Körpers summiert (Summationszeichen S),

$$S\,dm\,\mathfrak{r}' \times \dot{\mathfrak{v}} = S\,\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{p}\,.$$

Wegen $\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v}) = (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v})^{\cdot} = \dot{\mathfrak{r}}' \times \mathfrak{v} + \mathfrak{r}' \times \dot{\mathfrak{v}}$ ist $\mathfrak{r}' \times \dot{\mathfrak{v}} = (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v})^{\cdot} - \dot{\mathfrak{r}}' \times \mathfrak{v}$, oder mit $\dot{\mathfrak{r}}' = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0$

$$\mathfrak{r}' \times \dot{\mathfrak{v}} = (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v})^{\cdot} + \mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{v}$$

und demnach

$$S\,dm\,\mathfrak{r}' \times \dot{\mathfrak{v}} = S\,dm\,(\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v})^{\cdot} + S\,dm\,\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{v} = S\,\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{p}\,. \tag{11}$$

Mit $S\,dm\,\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v} = \mathfrak{B}_0$ (Impulsmoment oder Drall des starren Körpers in bezug auf 0), $S\,\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_0$ (statisches Moment aller äußeren Kräfte in bezug auf 0) und $S\,dm\,\mathfrak{v} = m\,\mathfrak{v}_s$ (resultierender Impuls des starren Körpers) entsteht aus (11) die allgemeinste Form des Drallsatzes für irgend einen Bezugspunkt:

$$\dot{\mathfrak{B}}_0 + m\,\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{v}_s = \mathfrak{M}_0\,. \tag{12}$$

Die bekannte, speziellere Form des Drallsatzes

$$\dot{\mathfrak{B}}_0 = \mathfrak{M}_0 \tag{13}$$

geht aus (12) hervor, wenn $\mathfrak{v}_0 = 0$ oder $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_s$ ist, d.h. wenn der Bezugspunkt im Inertialsystem festliegt oder in den Schwerpunkt fällt.

d) Ist im besonderen 0 ein körperfester Punkt und dreht sich der Körper um diesen mit der absoluten Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$, so kommt $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \dot{\mathfrak{r}}' = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{w} \times \mathfrak{r}'$ und daher

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_0 &= S\,dm\,\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v} = S\,dm\,\mathfrak{r}' \times (\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{w} \times \mathfrak{r}') \\ &= m\,\mathfrak{r}_s' \times \mathfrak{v}_0 + S\,dm\,\mathfrak{r}' \times (\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}')\end{aligned}$$

oder mit der Abkürzung $S\,dm\,\mathfrak{r}' \times (\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}') = \mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B}_0 = m\,\mathfrak{r}_s' \times \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{B}\,. \tag{14}$$

Bezieht man $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{w}$ auf drei von 0 ausgehende Koordinatenachsen mit den Grundvektoren $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ (Abb. 4) und bedeuten T_1, T_2, T_3 die Trägheitsmomente, $D_{12} = D_{21}$, $D_{13} = D_{31}$, $D_{23} = D_{32}$ die Deviationsmomente des starren Körpers bezüglich dieser Achsen sowie w_1, w_2, w_3 die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$, so ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{i}_1(w_1 T_1 - w_2 D_{12} - w_3 D_{13}) + \mathfrak{i}_2(w_2 T_2 - w_3 D_{23} - w_1 D_{21}) + \mathfrak{i}_3(w_3 T_3 - w_1 D_{31} - w_2 D_{32}). \tag{15}$$

Gleichung (15) kann mit Hilfe des Trägheitstensors Φ in der überaus einfachen Form

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{w}\,\Phi \tag{16}$$

angeschrieben werden. Das symbolische Produkt $\mathfrak{w}\,\Phi$ kann auch ohne Kenntnis der Tensorrechnung verstanden und ausgeführt werden: Es bedeutet, daß zwecks Darstellung des Vektors $\mathfrak{B}$ bestimmte Komponenten des Vektors $\mathfrak{w}$ mit bestimmten Trägheits- bzw. Deviationsmomenten, den „Maßzahlen" des Tensors Φ, zu multiplizieren und die Produkte in genau der Reihenfolge zu summieren sind, die (15) angibt. An die Stelle des Vektors $\mathfrak{w}$ kann ein beliebiger, anderer Vektor treten, ohne daß die Multiplikationsvorschrift, die (15) ausspricht, geändert werden müßte.

Die zeitliche Änderung des Dralls (14) im Inertialsystem

$$\dot{\mathfrak{B}}_0 = m\,\dot{\mathfrak{r}}_s' \times \mathfrak{v}_0 + m\,\mathfrak{r}_s' \times \dot{\mathfrak{v}}_0 + \dot{\mathfrak{B}}$$

läßt sich wegen $\dot{\mathfrak{r}}_s' = \mathfrak{v}_s - \mathfrak{v}_0$ auch in der Form

$$\dot{\mathfrak{B}}_0 = m\,\mathfrak{v}_s \times \mathfrak{v}_0 + m\,\mathfrak{r}_s' \times \dot{\mathfrak{v}}_0 + \dot{\mathfrak{B}}$$

anschreiben.

Bildet man jetzt die Summe in (12) und beachtet, daß $m\,\mathfrak{v}_s \times \mathfrak{v}_0 + m\,\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{v}_s = 0$ ist, so entsteht der Drallsatz für einen körperfesten Bezugspunkt

$$\dot{\mathfrak{B}} + m\,\mathfrak{r}_s' \times \dot{\mathfrak{v}}_0 = \mathfrak{M}_0\,, \tag{17}$$

der für die Anwendungen überaus zweckmäßig ist, da sich starre Körper bei technischen Problemen vielfach ständig um einen Punkt drehen.

Ist der Bezugspunkt zugleich auch raumfest ($\mathfrak{v}_0 = \dot{\mathfrak{v}}_0 = 0$) oder mit dem Schwerpunkt identisch ($\mathfrak{r}_s' = 0$), so kommt nach (17)

$$\dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{M}_0\,, \tag{18}$$

nach (14) $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$, also $\dot{\mathfrak{B}}_0 = \dot{\mathfrak{B}}$; daher sind die Formen (13) und (18) des Drallsatzes identisch. Sie werden vor allem dann verwendet, wenn kein ständiger Drehpunkt gegeben ist und wenn die Schwerpunktsbewegung und die Drehbewegung um den Schwerpunkt voneinander unabhängig sind.

e) Im Zusammenhang mit der Theorie der Relativbewegung interessiert besonders die Drehung eines starren Körpers um einen im Fahrzeug festgehaltenen Punkt. Es liegt nahe, diesen Punkt als Ursprung des fahrzeugfesten und des körperfesten Bezugssystems und als Bezugspunkt für $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{r}_s'$ und $\mathfrak{M}_0$ zu verwenden. Seine absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ in (17) ist dann identisch mit $\mathfrak{v}_0$ in (8), der Vektor $\mathfrak{r}_s'$ mit $\mathfrak{x}$ in Abb. 2. Gleichung (17) lautet in diesem Falle

$$\dot{\mathfrak{B}} + m\,\mathfrak{x} \times \dot{\mathfrak{v}}_0 = \mathfrak{M}_0. \tag{19}$$

Die Dralländerung $\dot{\mathfrak{B}}$ folgt aus (16), wenn man differenziert, zu

$$\dot{\mathfrak{B}} = \dot{\mathfrak{w}}\,\Phi + \mathfrak{w}\,\dot{\Phi}\,.$$

Andererseits ist nach (3), wenn dort $\mathfrak{r} = \mathfrak{B}$ gesetzt wird,

$$\dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{B} + \mathring{\mathfrak{B}}\,.$$

Die zeitliche Änderung $\mathring{\mathfrak{B}}$ des Vektors $\mathfrak{B}$ im körperfesten Bezugssystem lautet zunächst $\mathring{\mathfrak{B}} = \mathring{\mathfrak{w}}\,\Phi + \mathfrak{w}\,\mathring{\Phi}$, jedoch ist in diesem System Φ konstant, also $\mathring{\Phi} = 0$, weil die Maßzahlen

des Tensors Φ, die Trägheits- und Deviationsmomente, beim starren Körper unveränderlich sind, wenn sie auf körperfeste Achsen bezogen werden. Da folglich $\mathring{\mathfrak{B}} = \mathring{\mathfrak{w}}\,\Phi$ oder wegen $\mathring{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} + \mathring{\mathfrak{w}} = \mathring{\mathfrak{w}}$ auch $\mathring{\mathfrak{B}} = \mathring{\mathfrak{w}}\,\Phi$ ist, kann man

$$\mathring{\mathfrak{B}} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{B} + \mathring{\mathfrak{w}}\,\Phi = \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}\,\Phi + \mathring{\mathfrak{w}}\,\Phi$$

setzen und erkennt, daß $\mathfrak{w}\,\mathring{\Phi} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}\,\Phi$ sein muß. Gleichung (19) lautet jetzt

$$\mathring{\mathfrak{w}}\,\Phi + \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}\,\Phi + m\,\mathfrak{x} \times \mathring{\mathfrak{v}}_0 = \mathfrak{M}_0 . \tag{20}$$

Mit $\mathring{\mathfrak{v}}_0 = \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_0 + \dot{\mathfrak{v}}_0$ und $\mathring{\mathfrak{w}} = \dot{\mathfrak{u}} + \mathfrak{u} \times \mathfrak{o} + \dot{\mathfrak{o}}$ oder $\mathring{\mathfrak{v}}_0 = \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{o} \times \mathfrak{v}_0 + \mathring{\mathfrak{v}}_0$ und $\mathring{\mathfrak{w}} = \mathring{\mathfrak{w}} = \mathring{\mathfrak{u}} + \mathring{\mathfrak{o}}$ erhält man aus (20) zwei verschiedene, explizite Formen der zweiten dynamischen Grundgleichung der Relativbewegung:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathfrak{o}}\,\Phi + \mathfrak{o} \times \mathfrak{o}\,\Phi + m\,\mathfrak{x} \times \dot{\mathfrak{v}}_0 + m\,\mathfrak{x} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_0) + \dot{\mathfrak{u}}\,\Phi + \mathfrak{u} \times \mathfrak{u}\,\Phi \\ &\qquad + \mathfrak{o} \times \mathfrak{u}\,\Phi + \mathfrak{u} \times \mathfrak{o}\,\Phi + (\mathfrak{u} \times \mathfrak{o})\,\Phi = \mathfrak{M}_0 , \end{aligned}\right| \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathring{\mathfrak{o}}\,\Phi + \mathfrak{o} \times \mathfrak{o}\,\Phi + m\,\mathfrak{x} \times \mathring{\mathfrak{v}}_0 + m\,\mathfrak{x} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_0) + \mathring{\mathfrak{u}}\,\Phi + \mathfrak{u} \times \mathfrak{u}\,\Phi \\ &\qquad m\,\mathfrak{x} \times (\mathfrak{o} \times \mathfrak{v}_0) + \mathfrak{o} \times \mathfrak{u}\,\Phi + \mathfrak{u} \times \mathfrak{o}\,\Phi = \mathfrak{M}_0 , \end{aligned}\right| \tag{22}$$

die mit den von *Magnus* angegebenen, entsprechenden Gleichungen[1] übereinstimmen. Man beachte, daß *Magnus* zwar einen ebenfalls körperfesten, nicht aber gleichzeitig fahrzeugfesten Bezugspunkt verwendet und daher dessen Relativgeschwindigkeit berücksichtigen muß. Außerdem sind dort die symbolischen Produkte $\mathfrak{u}\,\Phi$, $\mathfrak{o}\,\Phi$ usw. mit vertauschten Faktoren, also $\Phi\,\mathfrak{u}$, $\Phi\,\mathfrak{o}$ usw. geschrieben, was nach den Regeln der Tensorrechnung bei einem symmetrischen Tensor wie Φ gestattet ist.

Setzt man in (21) und (22) $\mathfrak{x} = 0$, so entstehen die expliziten Vektorgleichungen, die dem Drallsatz (18) entsprechen. Die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}_0$ werden in (21) vom Fahrzeuge, in (22) vom körperfesten System aus gesehen.

f) Man gewinnt die entsprechenden Komponentengleichungen, indem man die Vektoren aus den im Punkte 0 entspringenden Grundvektoren $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ (Abb. 4) aufbaut, die Produkte aus Vektor und Tensor bildet und schließlich die Maßzahlen eines und desselben Einheitsvektors beiderseits des Gleichheitszeichens gegenüberstellt. Das Ergebnis sind je drei simultane Differentialgleichungen für die Komponenten o_1, o_2, o_3 der relativen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$, und zwar gehen hervor

aus (21):

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{o}_1\,T_1 - \dot{o}_2\,D_{12} - \dot{o}_3\,D_{13} + o_2\,o_3\,(T_3 - T_2) - o_1\,o_2\,D_{13} + o_1\,o_3\,D_{12} + (o_3^2 - o_2^2)\,D_{23} \\
&\quad + m\,x_2\,(\dot{v}_3 + u_1\,v_2 - u_2\,v_1) - m\,x_3\,(\dot{v}_2 + u_3\,v_1 - u_1\,v_3) \\
&\quad + \dot{u}_1\,T_1 - \dot{u}_2\,D_{12} - \dot{u}_3\,D_{13} + u_2\,u_3\,(T_3 - T_2) - u_1\,u_2\,D_{13} + u_1\,u_3\,D_{12} \\
&\quad + (u_3^2 - u_2^2)\,D_{23} + u_2\,o_3\,(T_3 + T_1 - T_2) + u_3\,o_2\,(T_3 - T_1 - T_2) \\
&\quad + 2\,(u_1\,o_3\,D_{12} + u_3\,o_3\,D_{23} - u_1\,o_2\,D_{13} - u_2\,o_2\,D_{23}) = M_1 , \\
&\dot{o}_2\,T_2 - \dot{o}_3\,D_{23} - \dot{o}_1\,D_{21} + o_3\,o_1\,(T_1 - T_3) - o_2\,o_3\,D_{21} + o_2\,o_1\,D_{23} + (o_1^2 - o_3^2)\,D_{31} \\
&\quad + m\,x_3\,(\dot{v}_1 + u_2\,v_3 - u_3\,v_2) - m\,x_1\,(\dot{v}_3 + u_1\,v_2 - u_2\,v_1) \\
&\quad + \dot{u}_2\,T_2 - \dot{u}_3\,D_{23} - \dot{u}_1\,D_{21} + u_3\,u_1\,(T_1 - T_3) - u_2\,u_3\,D_{21} + u_2\,u_1\,D_{23} \\
&\quad + (u_1^2 - u_3^2)\,D_{31} + u_3\,o_1\,(T_1 + T_2 - T_3) + u_1\,o_3\,(T_1 - T_2 - T_3) \\
&\quad + 2\,(u_2\,o_1\,D_{23} + u_1\,o_1\,D_{31} - u_2\,o_3\,D_{21} - u_3\,o_3\,D_{31}) = M_2 , \\
&\dot{o}_3\,T_3 - \dot{o}_1\,D_{31} - \dot{o}_2\,D_{32} + o_1\,o_2\,(T_2 - T_1) - o_3\,o_1\,D_{32} + o_3\,o_2\,D_{31} + (o_2^2 - o_1^2)\,D_{12} \\
&\quad + m\,x_1\,(\dot{v}_2 + u_3\,v_1 - u_1\,v_3) - m\,x_2\,(\dot{v}_1 + u_2\,v_3 - u_3\,v_2) \\
&\quad + \dot{u}_3\,T_3 - \dot{u}_1\,D_{31} - \dot{u}_2\,D_{32} + u_1\,u_2\,(T_2 - T_1) - u_3\,u_1\,D_{32} + u_3\,u_2\,D_{31} \\
&\quad + (u_2^2 - u_1^2)\,D_{12} + u_1\,o_2\,(T_2 + T_3 - T_1) + u_2\,o_1\,(T_2 - T_3 - T_1) \\
&\quad + 2\,(u_3\,o_2\,D_{31} + u_2\,o_2\,D_{12} - u_3\,o_1\,D_{32} - u_1\,o_1\,D_{12}) = M_3 ,
\end{aligned}\right| \tag{23}$$

[1] A. a. O. S. 343, Gl. (19b) und (18b).

aus (22):

$$
\begin{aligned}
&\mathring{o}_1 T_1 - \mathring{o}_2 D_{12} - \mathring{o}_3 D_{13} + o_2 o_3 (T_3 - T_2) - o_1 o_2 D_{13} + o_1 o_3 D_{12} + (o_3^2 - o_2^2) D_{23} \\
&\quad + m x_2 (\mathring{v}_3 + u_1 v_2 - u_2 v_1) - m x_3 (\mathring{v}_2 + u_3 v_1 - u_1 v_3) \\
&\quad + \mathring{u}_1 T_1 - \mathring{u}_2 D_{12} - \mathring{u}_3 D_{13} + u_2 u_3 (T_3 - T_2) - u_1 u_2 D_{13} + u_1 u_3 D_{12} + (u_3^2 - u_2^2) D_{23} \\
&\quad + m x_2 (o_1 v_2 - o_2 v_1) - m x_3 (o_3 v_1 - o_1 v_3) + (u_2 o_3 + u_3 o_2) (T_3 - T_2) \\
&\quad - (u_1 o_2 + u_2 o_1) D_{13} + (u_1 o_3 + u_3 o_1) D_{12} + 2 (u_3 o_3 - u_2 o_2) D_{23} = M_1 , \\
&\mathring{o}_2 T_2 - \mathring{o}_3 D_{23} - \mathring{o}_1 D_{21} + o_3 o_1 (T_1 - T_3) - o_2 o_3 D_{21} + o_2 o_1 D_{23} + (o_1^2 - o_3^2) D_{31} \\
&\quad + m x_3 (\mathring{v}_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2) - m x_1 (\mathring{v}_3 + u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&\quad + \mathring{u}_2 T_2 - \mathring{u}_3 D_{23} - \mathring{u}_1 D_{21} + u_3 u_1 (T_1 - T_3) - u_2 u_3 D_{21} + u_2 u_1 D_{23} + (u_1^2 - u_3^2) D_{31} \\
&\quad + m x_3 (o_2 v_3 - o_3 v_2) - m x_1 (o_1 v_2 - o_2 v_1) + (u_3 o_1 + u_1 o_3) (T_1 - T_3) \\
&\quad - (u_2 o_3 + u_3 o_2) D_{21} + (u_2 o_1 + u_1 o_2) D_{12} + 2 (u_1 o_1 - u_3 o_3) D_{31} = M_2 , \\
&\mathring{o}_3 T_3 - \mathring{o}_1 D_{31} - \mathring{o}_2 D_{32} + o_2 o_1 (T_2 - T_1) - o_3 o_1 D_{32} + o_3 o_2 D_{31} + (o_2^2 - o_1^2) D_{12} \\
&\quad + m x_1 (\mathring{v}_2 + u_3 v_1 - u_1 v_3) - m x_2 (\mathring{v}_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2) \\
&\quad + \mathring{u}_3 T_3 - \mathring{u}_1 D_{31} - \mathring{u}_2 D_{32} + u_2 u_1 (T_2 - T_1) - u_3 u_1 D_{32} + u_3 u_2 D_{31} + (u_2^2 - u_1^2) D_{12} \\
&\quad + m x_1 (o_3 v_1 - o_1 v_3) - m x_2 (o_2 v_3 - o_3 v_2) + (u_1 o_2 + u_2 o_1) (T_2 - T_1) \\
&\quad - (u_3 o_1 + u_1 o_3) D_{32} + (u_3 o_2 + u_2 o_3) D_{31} + 2 (u_2 o_2 - u_1 o_1) D_{12} = M_3 .
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Setzt man hierin $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, so entstehen die Komponentengleichungen, die dem Drallsatz (18) entsprechen.

Die bei der Zerlegung verwendeten Grundvektoren i_1, i_2, i_3 (Abb. 4) können zwar ganz beliebig orientiert sein, jedoch ist es zweckmäßig, die Zerlegung der Vektoren in demjenigen Bezugssystem vorzunehmen, in dem ihre zeitlichen Änderungen gesehen werden sollen. Man lege also die Grundvektoren bei Anwendung von (21) parallel zu den Koordinatenachsen des Fahrzeugraumes, transformiere die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ in dieses System und differenziere sie dort. Allerdings müssen nun auch die Trägheits- und Deviationsmomente auf die Richtungslinien der Grundvektoren bezogen werden, was im allgemeinen nicht von vornherein möglich ist, weil die Stellung des Körpers im Fahrzeug erst ermittelt werden soll.

Die Differentialgleichungen (23) müssen in diesem Fall durch ein System von Transformationsgleichungen für die Massenmomente zweiter Ordnung des starren Körpers ergänzt werden, deren Lösung überaus schwierig ist, da sie vom zweiten Grade sind. Die Integration des gesamten Gleichungssystems wird nur in wenigen, besonders einfachen Fällen gelingen. Ihr Ergebnis, die Komponenten der relativen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ bezüglich des Fahrzeugraumes, beschreibt allerdings die relative Drehbewegung so, wie sie ein dort aufgestellter Beobachter sieht, also unmittelbar und anschaulich.

Ganz anders ist die Lösung von (22) zu bewerten, bei deren Anwendung man zweckmäßig ein körperfestes Bezugssystem benutzt. In diesem Fall sind die Trägheits- und Deviationsmomente zeitlich konstant und nach Wahl der Bezugsachsen bekannt. Außerdem erreicht man weitgehende Vereinfachungen der Differentialgleichungen (24), wenn die Bezugsachsen in die Trägheitshauptachsen gelegt werden. Schwierig ist nun jedoch die Darstellung der Vektoren $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ und ihrer zeitlichen Änderungen im körperfesten System, weil dessen Stellung gegenüber den Vektoren vorerst unbekannt ist. Auch hier kommt demnach zu den Gleichungen (24) ein System von Transformationsgleichungen hinzu, die zwar nur vom ersten Grade aber dennoch nur in einfachen Fällen der Relativbewegung lösbar sind. Hat man schließlich Integrale von (24) gefunden, so wird damit die relative Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ und die Lage der relativen Drehachse innerhalb des Körpers bekannt, ein weniger anschauliches Ergebnis als die Kenntnis der Drehachse innerhalb des Fahrzeugraumes.

Zum gleichen Resultat führt auch (21), wenn man, mit Hilfe von (2), $\dot{\mathfrak{o}}$ durch $\mathring{\mathfrak{o}}$ ersetzt und die Vektoren im körperfesten System zerlegt. Es entstehen Differentialgleichungen, die mit (23) übereinstimmen, wenn $\mathring{o}_1$, $\mathring{o}_2$, $\mathring{o}_3$ statt $\dot{o}_1$, $\dot{o}_2$, $\dot{o}_3$ geschrieben wird. Sind die Bezugachsen Schwerpunktshauptachsen ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0$) und ist die Fahrzeugbewegung eine gleichförmige Rotation ($\dot{u} = 0$, $\mathfrak{v}_0 = 0$, $\dot{v}_0 = 0$), so lautet die erste Dif-

ferentialgleichung

$$\mathring{o}_1 T_1 + u_2 o_3 T_1 - u_3 o_2 T_1 + (o_2 o_3 + u_2 u_3 + u_2 o_3 + u_3 o_2)(T_3 - T_2) = M_1$$

oder

$$T_1 (\mathring{o}_1 - u_3 o_2 + u_2 o_3) + (T_3 - T_2)(u_2 + o_2)(u_3 + o_3) = M_1 .$$

Die letzte Form dieser Gleichung wurde von *v. Mises* angegeben[1]. Man erkennt außerdem in $u_2 o_3 - u_3 o_2$ die erste Komponente des Vektors $\mathfrak{u} \times \mathfrak{o}$. Nun ist wegen $\dot{\mathfrak{u}} = \mathfrak{o} \times \mathfrak{u} + \mathring{\mathfrak{u}}$ und $\dot{\mathfrak{u}} = 0$: $\mathring{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{o}$ also $\mathring{u}_1 = u_2 o_3 - u_3 o_2$. Damit entsteht aus der letzten Gleichung die Beziehung

$$T_1 (\mathring{o}_1 + \mathring{u}_1) + (T_3 - T_2)(u_2 + o_2)(u_3 + o_3) = M_1$$

oder mit $u_\nu + o_\nu = w_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$,

$$T_1 \mathring{w}_1 + (T_3 - T_2) w_2 \cdot w_3 = M_1 ,$$

d.i. die erste der bekannten *Euler*schen Gleichungen für den Sonderfall, daß die Bezugsachsen Schwerpunkthauptachsen sind.

3. Die Kinematik des Taumelscheibengetriebes. Die Drehachse der Kurbelwelle stehe senkrecht zur Erdoberfläche, der stets ruhende Mittelpunkt 0 der Taumelscheibe sei der Ursprung sowohl des raumfesten als auch des scheibenfesten Bezugssystems (Abb. 5); dann ist die Ursprungsbeschleunigung $\mathfrak{v}_0 = 0$. Von den Koordinatenachsen des orthogonalen Fahrzeugraumes (x_1, x_2, x_3) werde x_3 in die Achse der Scheibenbohrung, x_2 in den geführten Durchmesser gelegt. Das ebenfalls orthogonale, raumfeste System (z_1, z_2, z_3) sei so orientiert, daß z_3 in die Drehachse der Kurbelwelle, z_2 in diejenige Ebene fällt, in der sich der geführte Durchmesser bewegt. Dann bleibt x_2 stets in der (z_2, z_3)-Ebene und senkrecht auf z_1. Weiterhin steht die Projektion x_3' der Achse x_3 auf die (z_2, z_3)-Ebene immer senkrecht auf x_2.[2]

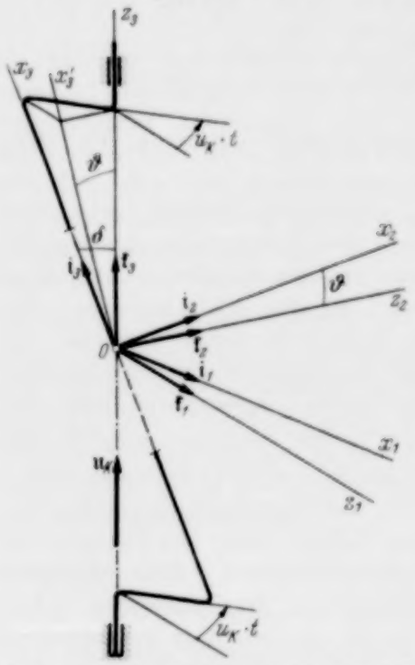

Abb. 5. Die Stellung der Taumelwelle und des scheibenfesten Bezugssystems (x_1 x_2 x_3) im raumfesten Bezugssystem (z_1 z_2 z_3).

Abb. 6. Die absolute Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Taumelscheibe, zweimal dargestellt als Summe je zweier Komponenten.

Die Achse x_3 umläuft mit konstanter Drehgeschwindigkeit u_K die raumfeste Achse z_3, der Drehwinkel $u_K t$ der Kurbelwelle werde von der (z_1,z_3)-Ebene aus gemessen. Die Taumelscheibe muß sich infolge der Fesselung eines Durchmessers relativ zum Kurbelzapfen (x_3-Achse) mit einer Drehgeschwindigkeit u_{SK} derart drehen, daß ihre absolute Drehgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_K + \mathfrak{u}_{SK}$$

zugleich auch die Summe zweier anderer Drehgeschwindigkeitsvektoren ist:

Die Taumelbewegung kommt nämlich auf andere Weise auch dadurch zustande, daß der geführte Durchmesser (x_2-Achse) um die Achse z_1 mit der Drehgeschwindigkeit u_D und die Scheibe gleichzeitig um den geführten Durchmesser mit der Drehgeschwindigkeit u_{SD} gedreht wird. Die Summe $\mathfrak{u}_D + \mathfrak{u}_{SD}$ muß mit $\mathfrak{u}$ übereinstimmen (Abb. 6):

$$\mathfrak{u}_D + \mathfrak{u}_{SD} = \mathfrak{u}_K + \mathfrak{u}_{SK} = \mathfrak{u} . \tag{25}$$

Bei Verwendung der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{f}$ (Abb. 5) wird

$$\mathfrak{u}_D = \mathfrak{f}_1 u_D , \quad \mathfrak{u}_{SD} = \mathfrak{i}_2 u_{SD} , \quad \mathfrak{u}_K = \mathfrak{f}_3 u_K , \quad \mathfrak{u}_{SK} = -\mathfrak{i}_3 u_{SK} .$$

Damit kann die Bedingung (25) in der Form

$$\mathfrak{f}_1 u_D + \mathfrak{i}_2 u_{SD} = \mathfrak{f}_3 u_K - \mathfrak{i}_3 u_{SK} = \mathfrak{u} \tag{26}$$

angeschrieben werden.

[1] A. a. O. S. 197, Gl. (17b).

[2] Werden zwei zueinander senkrechte Geraden auf eine Ebene projiziert, die zu einer der Geraden parallel liegt, so schließen die Bildgeraden einen rechten Winkel ein.

Stellt man die scheibenfesten Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_\nu$ in den raumfesten Einheitsvektoren $\mathfrak{k}_\mu$ dar, setzt also

$$\mathfrak{i}_\nu = \sum_{\mu=1}^{3} \mathfrak{k}_\mu \, i_{\nu\mu} \qquad (\nu = 1, 2, 3) ,$$

so sind von den neun Maßzahlen $i_{\nu\mu}$ sechs unmittelbar bekannt, wenn man Abb. 5 und die zugehörigen Erläuterungen beachtet:

Abb. 7. Die Projektionen zweier Grundvektoren aufeinander.

Maßzahlen des Vektors $\mathfrak{i}_3$:

$$i_{31} = -\sin\delta\cos u_K t , \qquad i_{32} = -\sin\delta\sin u_K t , \qquad i_{33} = \cos\delta .$$

Maßzahlen des Vektors $\mathfrak{i}_2$:

$$i_{21} = 0 , \qquad i_{22} = \cos\vartheta , \qquad i_{23} = \sin\vartheta .$$

Da die Geraden x_2 und x_3' aufeinander senkrecht stehen, sind die beiden mit ϑ bezeichneten Winkel einander gleich. Infolgedessen ist $\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(x_3', z_3) = \operatorname{tg}\delta \sin u_K t$. Daraus folgt

$$i_{21} = 0 , \qquad i_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}} , \qquad i_{23} = \frac{\operatorname{tg}\delta \sin u_K t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}} . \tag{27}$$

Die Maßzahlen des Vektors $\mathfrak{i}_1$ ergeben sich mittelbar aus folgender Überlegung.

Zur Darstellung der Einheitsvektoren $\mathfrak{k}_\mu$ in den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_\nu$,

$$\mathfrak{k}_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \mathfrak{i}_\nu \, k_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

benötigt man die Maßzahlen [1]

$$k_{\mu\nu} = i_{\nu\mu} .$$

Wegen $\sum_{\nu=1}^{3} k_{\mu\nu}^2 = 1$ ist daher auch $\sum_{\nu=1}^{3} i_{\mu\nu}^2 = 1$; daraus folgt

$$i_{1\mu}^2 = 1 - i_{2\mu}^2 - i_{3\mu}^2 \qquad (\mu = 1, 2, 3) ,$$

oder schließlich die Maßzahlen des Vektors $\mathfrak{i}_1$:

$$\left.\begin{aligned} i_{11} &= \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}{1 + \operatorname{tg}^2\delta}} , \\ i_{12} &= -\frac{\sin\delta \operatorname{tg}\delta \sin 2 u_K t}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}} , \\ i_{13} &= \frac{\sin\delta \cos u_K t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}} . \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Werden jetzt in (26) die Vektoren $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_3$ durch die Summen $\sum_{\nu=1}^{3} \mathfrak{i}_\nu \, i_{\nu 1}$ bzw. $\sum_{\nu=1}^{3} \mathfrak{i}_\nu \, i_{\nu 3}$ ersetzt, so entstehen zwei verschiedene Formulierungen der Komponentendarstellung

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}_1 u_1 + \mathfrak{i}_2 u_2 + \mathfrak{i}_3 u_3$$

der absoluten Drehgeschwindigkeit der Taumelscheibe:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{i}_1 u_D \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}{1 + \operatorname{tg}^2\delta}} \\ &+ \mathfrak{i}_2 u_{SD} \\ &+ \mathfrak{i}_3 (-u_D \sin\delta \cos u_K t) \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{i}_1 u_K \frac{\sin\delta \cos u_K t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}} \\ &+ \mathfrak{i}_2 u_K \frac{\operatorname{tg}\delta \sin u_K t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta \sin^2 u_K t}} \\ &+ \mathfrak{i}_3 (u_K \cos\delta - u_{SK}) \end{aligned}\right\} = \mathfrak{u} ,$$

[1] Die Projektionen eines Einheitsvektors $\mathfrak{i}_\nu$ auf einen Einheitsvektor $\mathfrak{k}_\mu$ und umgekehrt sind einander gleich, siehe auch Abb. 7.

woraus unmittelbar bzw. nach kurzer Zwischenrechnung (Koeffizientenvergleich und Berechnung von u_D) die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_K \frac{\sin\delta\cos u_K t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\sin^2 u_K t}}\,, \\ u_2 &= u_K \frac{\operatorname{tg}\delta\sin u_K t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\sin^2 u_K t}}\,, \\ u_3 &= -u_K \frac{\sin\delta\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}^2\delta\sin^2 u_K t}\cos^2 u_K t \end{aligned}\right| \qquad (29)$$

abgelesen werden können. Ihre zeitlichen Änderungen sind

$$\left.\begin{aligned} \dot u_1 &= -\frac{1}{W^3}u_K^2\sin\delta\,(1+\operatorname{tg}^2\delta)\sin u_K t\,, \\ \dot u_2 &= \frac{1}{W^3}u_K^2\operatorname{tg}\delta\cos u_K t\,, \\ \dot u_3 &= \frac{1}{W^4}u_K^2\sin\delta\operatorname{tg}\delta\,(1+\operatorname{tg}^2\delta)\sin 2u_K t \\ \text{mit}\qquad W &= \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\sin^2 u_K t}\,. \end{aligned}\right| \qquad (30)$$

Es ist auch ohne explizite Durchrechnung offensichtlich, daß die mit (29) und (30) berechneten Koeffizienten der allgemeinen Differentialgleichungen (10) überaus verwickelte Funktionen der Zeit sind und eine strenge Integration verhindern.

Da nach *Bredschneider* $\delta \approx 0{,}1$ ist, kann man $\operatorname{tg}\delta \approx \sin\delta \approx \delta$, $\cos\delta \approx 1$ und $1+\delta^2 \approx 1$ setzen. Wenn man weiterhin ω statt u_K schreibt, lauten die vereinfachten Komponenten der Drehgeschwindigkeit

$$u_1 = \omega\delta\cos\omega t\,, \qquad u_2 = \omega\delta\sin\omega t\,, \qquad u_3 = -\omega\delta^2\cos^2\omega t\,, \qquad (31)$$

die vereinfachten Komponenten der Drehbeschleunigung

$$\dot u_1 = -\omega^2\delta\sin\omega t\,, \qquad \dot u_2 = \omega^2\delta\cos\omega t\,, \qquad \dot u_3 = \omega^2\delta^2\sin 2\omega t \qquad (32)$$

und schließlich diejenigen Koeffizienten in (10), in denen weitere Vereinfachungen zweckmäßig und zulässig sind[1]:

$$\left.\begin{aligned} -(u_2^2+u_3^2) &= -\omega^2\delta^2(\sin^2\omega t+\delta^2\cos^4\omega t) \approx -\omega^2\delta^2\sin^2\omega t\,, \\ u_1u_3+\dot u_2 &= -\omega^2\delta^3\cos^3\omega t+\omega^2\delta\cos\omega t \approx \omega^2\delta\cos\omega t\,, \\ -(u_1^2+u_3^2) &= -\omega^2\delta^2\cos^2\omega t-\omega^2\delta^4\cos^4\omega t \approx -\omega^2\delta^2\cos^2\omega t\,, \\ u_2u_3-\dot u_1 &= -\omega^2\delta^3\sin\omega t\cos^2\omega t+\omega^2\delta\sin\omega t \approx \omega^2\delta\sin\omega t\,, \\ u_3u_1-\dot u_2 &= -\omega^2\delta^3\cos^3\omega t-\omega^2\delta\cos\omega t \approx -\omega^2\delta\cos\omega t\,, \\ u_3u_2+\dot u_1 &= -\omega^2\delta^3\sin\omega t\cos^2\omega t-\omega^2\delta\sin\omega t \approx -\omega^2\delta\sin\omega t\,. \end{aligned}\right| \qquad (33)$$

4. Die reibungsfreie Kugelbewegung. a) Da die Kugelschwerpunkte an die geradlinigen Achsen der Führungsröhren gebunden sind, verläuft ihre Relativbewegung stets parallel zur x_3-Achse. Die Koordinaten $c_1 = r\sin\varphi$, $c_2 = r\cos\varphi$ des Punktes, in dem eine solche Röhrenachse die (x_1, x_2)-Ebene durchstößt (Abb. 8), sind daher stets auch Schwerpunktskoordinaten und von der Zeit unabhängig. In (10) muß demzufolge

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_1\,, \quad \dot x_1 = 0\,, \quad \ddot x_1 = 0\,, \\ x_2 &= c_2\,, \quad \dot x_2 = 0\,, \quad \ddot x_2 = 0 \end{aligned}\right| \qquad (34)$$

gesetzt werden.

---

[1] Zwar ist keineswegs $\sin^2\omega t$ stets genügend genau gleich $\sin^2\omega t + \delta^2\cos^4\omega t$, jedoch ist der mittlere Fehler aus einer Periode $f_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \delta^2\cos^4\omega t\; d(\omega t) = \frac{3}{8}\delta^2$ gegenüber dem Mittelwert der Funktion $F = \sin^2\omega t + \delta^2\cos^4\omega t$, d.i. $F_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin^2\omega t + \delta^2\cos^4\omega t)\, d(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\delta^2$, verschwindend klein.

Als äußere Kräfte wirken an der Kugel das Kugelgewicht

$$\mathfrak{G} = -\,m g\,\mathfrak{k}_3 = -\,m g\,(\mathfrak{i}_1 k_{31} + \mathfrak{i}_2 k_{32} + \mathfrak{i}_3 k_{33}) = -\,m g\,(\mathfrak{i}_1 i_{13} + \mathfrak{i}_2 i_{23} + \mathfrak{i}_3 i_{33})$$

mit den Komponenten

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -\,m g\,i_{13} = -\,m g\,\frac{\sin\delta\cos\omega t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\sin^2\omega t}} \approx -\,m g\,\delta\cos\omega t\,,\\ G_2 &= -\,m g\,i_{23} = -\,m g\,\frac{\operatorname{tg}\delta\sin\omega t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\sin^2\omega t}} \approx -\,m g\,\delta\sin\omega t\,,\\ G_3 &= -\,m g\,i_{33} = -\,m g\cos\delta \qquad\qquad \approx -\,m g \end{aligned}\right| \tag{35}$$

und eine Normalkraft $\mathfrak{N}$ senkrecht zur Röhrenachse, also parallel zur (x_1, x_2)-Ebene, mit den Komponenten N_1 und N_2, die ebenso wie die zur Röhrenachse parallele Reibungskraft $\mathfrak{F} = \mathfrak{i}_3 F$ vorerst unbekannt sind. Die Komponenten der resultierenden, äußeren Kraft lauten dann

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= G_1 + N_1\,,\\ P_2 &= G_2 + N_2\,,\\ P_3 &= G_3 + F\,. \end{aligned}\right| \tag{36}$$

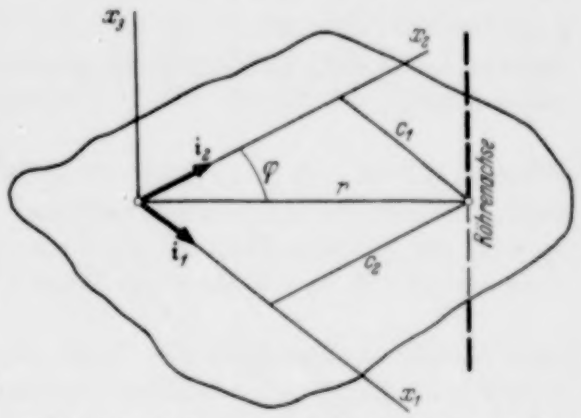

Abb. 8. Die Stellung einer Röhrenachse im scheibenfesten Bezugssystem $(x_1\ x_2\ x_3)$.

Die Größe der Reibungskraft hängt vom Bewegungszustand der Kugel in einer Weise ab, die später erörtert werden soll. Zunächst sei vorausgesetzt, daß Reibungswiderstände nicht auftreten.

Die allgemeinen Gleichungen (10) gehen dann unter Verwendung von (31) bis (34) und (36) und mit $F = 0$ in die folgenden, speziellen Grundgleichungen der reibungsfreien Kugelbewegung über:

$$\left.\begin{aligned} m\,(2\,\omega\delta\,\dot{x}_3\sin\omega t - \omega^2\delta^2 c_1\sin^2\omega t\\ \qquad - \omega^2\delta^2 c_2\sin\omega t\cos\omega t + \omega^2\delta\,x_3\cos\omega t) &= G_1 + N_1,\\ m\,(-\,2\,\omega\delta\,\dot{x}_3\cos\omega t + 3\,\omega^2\delta^2 c_1\sin\omega t\cos\omega t\\ \qquad - \omega^2\delta^2 c_2\cos^2\omega t + \omega^2\delta\,x_3\sin\omega t) &= G_2 + N_2,\\ m\,(\ddot{x}_3 - \omega^2\delta\,c_1\cos\omega t - \omega^2\delta\,c_2\sin\omega t - \omega^2\delta^2 x_3) &= G_3\,. \end{aligned}\right| \tag{37}$$

Die einzige, noch veränderliche Schwerpunktskoordinate x_3 wird im weiteren ohne Index geschrieben. Die eigentliche Bewegungsgleichung ist die dritte Gleichung (37), während die erste und zweite die Komponenten N_1 und N_2 der Normalkraft (Zwangskraft) liefern, sobald die aus der dritten Gleichung (37) bestimmte Funktion $x = x(t)$ in sie eingesetzt wird.

Die Bewegungsgleichung lautet nach Umordnung zweier Glieder und wenn man $G_3 = -\,m g$ sowie

$$c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t = r\sin(\omega t + \varphi)$$

einführt,

$$m\,\ddot{x} - m\,\omega^2\,\delta^2\,x = m\,\omega^2\delta\,r\sin(\omega t + \varphi) - m\,g\,. \tag{38}$$

Ihre homogene Lösung

$$x_h = A\,\mathfrak{Sin}\,\omega\delta t + B\,\mathfrak{Cof}\,\omega\delta t$$

beschreibt eine „Eigenbewegung", ihr partikuläres Integral

$$x_p = -\,\frac{\delta}{1+\delta^2}\,r\sin(\omega t + \varphi) + \frac{g}{\omega^2\,\delta^2}\,,$$

das bei kleinem δ ($\delta \approx 0{,}1$) und mit $\frac{g}{\omega^2\,\delta^2} = x_e$ auch

$$x_p = -\,\delta\,r\sin(\omega t + \varphi) + x_e$$

geschrieben werden kann, eine erzwungene Schwingung.

Abb. 9 zeigt drei charakteristische Formen der reibungsfreien Kugelbewegung

$$x - x_e = A\,\mathfrak{Sin}\,\omega\delta t + B\,\mathfrak{Cof}\,\omega\delta t - \delta\,r\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{39}$$

wobei zunächst noch unendlich lange Röhren vorausgesetzt sind. Die Eigenbewegung ist jeweils als gestrichelte Grundkurve, die sich überlagernde Schwingung stets für den Fall $\varphi = 0$ gezeichnet. Es sei ferner stets $A = 2\,\delta r$. Die Grundkurve hat, falls $B/A < -1$ ist, einen Extremwert (Kurve *a*, $B = -2A$), falls $B/A = -1$ ist, die Asymptote $x - x_c = 0$ (Kurve b), falls $B/A > -1$ ist, keinen Extremwert $\left(\text{Kurve c, } B = \frac{1}{2}A\right)$..

b) Sind die Röhren symmetrisch zur Taumelscheibe durch Deckel abgeschlossen, so ist die Schwerpunktsbewegung auf den Bereich $-l \leq x \leq l$ beschränkt (Abb. 10). Durch Stoß gegen den Deckel ändert die Kugel in gewissen Zeitabständen ihre Bewegungsrichtung. Die Bewegung zwischen zwei Stößen sei „Lauf" genannt. Ein Lauf kann an einem Deckel beginnen und entweder am gegenüberliegenden Deckel oder in seinem Anfangspunkt enden.

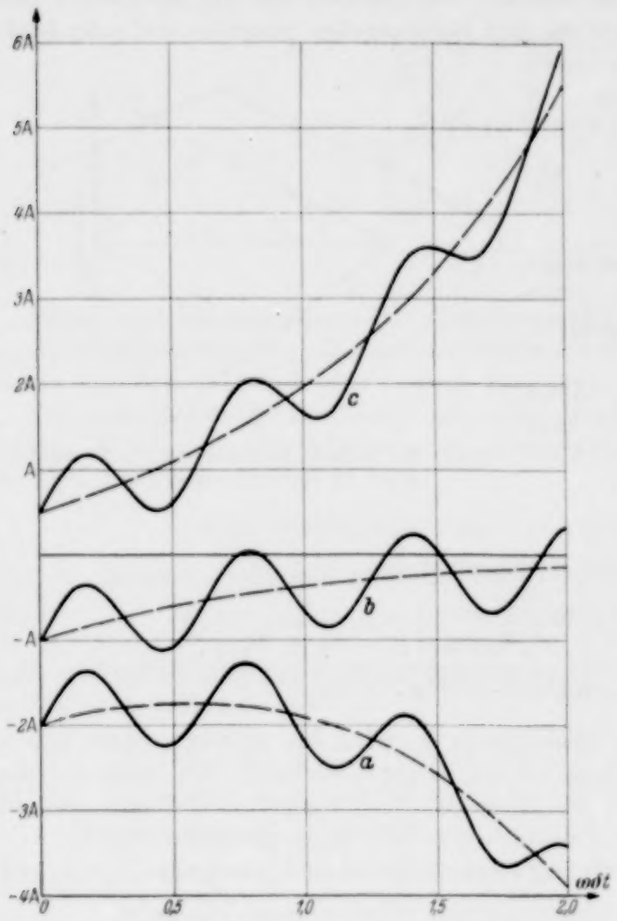

Abb. 9. Drei Weg-Zeit-Bilder der reibungsfreien Kugelbewegung.

Der n-te Lauf beginne zur Zeit $t = t_n$ am oberen Deckel ($x = l$) mit der Geschwindigkeit $v_n < 0$. Während des Laufes ist dann $t > t_n$, die Zeit $t' = t - t_n$ sei Laufzeit genannt. Damit wird $\omega t + \varphi = \omega t' + \omega t_n + \varphi = \omega t' + \varphi_n$, woraus $\varphi_n = \varphi + \omega t_n$ hervorgeht.

Ersetzt man in (39) t durch t' und φ durch φ_n, so entsteht die „Laufgleichung"

$$x_n = A_n \operatorname{Sin} \omega\delta t' + B_n \operatorname{Cos} \omega\delta t' - \delta r \sin(\omega t' + \varphi_n) + x_c\,, \qquad (40)$$

Aus den Anfangsbedingungen $x_n = l$, $\dot{x}_n = v_n$ für $t' = 0$ errechnet man

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{v_n}{\omega\delta} + r\cos\varphi_n\,, \\ B_n &= l - x_c + \delta r \sin\varphi_n\,. \end{aligned}\right| \qquad (41)$$

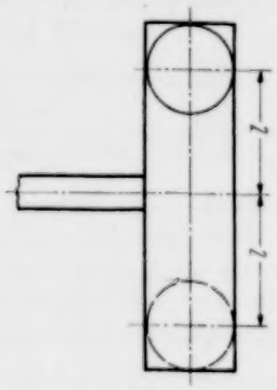

Abb. 10. Die beiden Endlagen einer Schlagkugel.

Der n-te Lauf endet im Augenblick $t = t_{n+1} = t_n + T_n$, d.h. $t' = T_n$, am unteren Deckel bei $x = -l$. Die „Laufdauer" T_n ist die Lösung der Bestimmungsgleichung

$$-l = A_n \operatorname{Sin} \omega\delta T_n + B_n \operatorname{Cos} \omega\delta T_n - \delta r \sin(\omega T_n + \varphi_n) + x_c\,, \qquad (42)$$

die aus (40) hervorgeht, wenn dort $t' = T_n$ und $x_n = -l$ gesetzt wird.

Beginnt der erste Lauf im Augenblick t_1, so ist $t_n = t_1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} T_\nu$ und folglich $\varphi_n = \varphi + \omega t_n = \varphi + \omega t_1 + \omega \sum_{\nu=1}^{n-1} T_\nu$. Die Kugel stößt am Ende des n-ten Laufes mit der Geschwindigkeit

$$v_n' = \omega\delta A_n \operatorname{Cos} \omega\delta T_n + \omega\delta B_n \operatorname{Sin} \omega\delta T_n - \omega\delta r \cos(\omega T_n + \varphi_n)$$

gegen den unteren Deckel, wendet und beginnt den $(n+1)$-ten Lauf mit der Geschwindigkeit

$$v_{n+1} = -\varepsilon v_n'\,, \qquad (\varepsilon = \text{Stoßziffer})\,.$$

Hat (42) keine reelle Lösung, so erkennt man daran, daß die Kugel den unteren Anschlag nicht erreicht. In diesem Falle muß auf der linken Seite von (42) das Vorzeichen umgekehrt

und dann T_n bestimmt werden. Diese Lösung T_n gibt den Zeitpunkt an, in dem die Kugel wieder auf den oberen Anschlag trifft.

Der $(n+1)$-te Lauf folgt der Gleichung

$$x_{n+1} = A_{n+1}\,\mathfrak{Sin}\,\omega\delta t' + B_{n+1}\,\mathfrak{Cos}\,\omega\delta t' - \delta r \sin(\omega t' + \varphi_{n+1}) + x_e$$

mit

$$A_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{\omega\,\delta} + r\cos\varphi_{n+1}\,, \qquad \varphi_{n+1} = \varphi + \omega\,t_1 + \omega\sum_{\nu=1}^{n} T_\nu\,.$$

Erreicht die Kugel den unteren Deckel, so ist

$$B_{n+1} = -\,l - x_e + \delta r \sin\varphi_{n+1}\,,$$

erreicht sie ihn nicht, so ist

$$B_{n+1} = +\,l - x_e + \delta r \sin\varphi_{n+1}\,.$$

Die gesamte Kugelbewegung wird als Folge einzelner Läufe durch die drei Zahlenfolgen A_n, B_n, φ_n $(n = 1, 2, 3\ldots)$ charakterisiert. Da die Bestimmungsgleichung (42) für T_n transzendent ist, kann ein allgemeines, explizites Bildungsgesetz für die Glieder der Folgen nicht formuliert werden.

c) *Bredschneider* hat spezielle Zahlenfolgen für gegebene Werte l, ω, δ, r, φ nomographisch bestimmt. Die Grundlage seiner Nomogramme bildet eine Darstellung der absoluten Kugelbewegung, bei der die Erdbeschleunigung vernachlässigt und die Taumelbewegung der Röhren als harmonische Translation längs der Röhrenachse mit der Amplitude a und der Frequenz ω angesehen wird.

Letztere folgt aus der genauen Kinematik (Ziffer 3) durch Grenzübergang. Macht man den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ des Durchstoßpunktes einer Röhrenachse durch die (x_1, x_2)-Ebene (Abb. 8)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}_1 c_1 + \mathfrak{i}_2 c_2 = \mathfrak{k}_1 (i_{11} c_1 + i_{21} c_2) + \mathfrak{k}_2 (i_{12} c_1 + i_{22} c_2) + \mathfrak{k}_3 (i_{13} c_1 + i_{23} c_2)$$

unendlich groß und zugleich δ unendlich klein derart, daß $\delta r = a$ ist, dann bleibt die Röhrenachse stets lotrecht und führt, wie die Spitze des Vektors $\mathfrak{r}$, eine in seiner dritten Komponente $(i_{13} c_1 + i_{23} c_2)$ ausgedrückte Schwingung s aus, die zufolge (27) und (28) bei kleinem δ und mit $u_K = \omega$ lautet:

$$s = \delta\,(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t) = \delta r \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi)\,.$$

Durch denselben Grenzübergang und mit $g = 0$ entsteht aus (38) die Differentialgleichung

$$m\,\ddot{x} = m\,\omega^2\,a \sin(\omega t + \varphi)$$

der relativen Kugelbewegung

$$x = -\,a \sin(\omega t + \varphi) + A t + B\,,$$

die *Bredschneiders* absoluter Kugelbewegung entspricht. Aus der entsprechenden Laufgleichung

$$x_n = -\,a \sin(\omega t' + \varphi_n) + A_n t' + B_n\,, \tag{43}$$

worin

$$\varphi_n = \varphi + \omega\,t_1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} T_\nu\,, \quad A_n = v_n + \omega\,a\cos\varphi_n\,, \qquad B_n = l + a\sin\varphi_n \tag{44}$$

ist, folgt die Bestimmungsgleichung für die Laufdauer T_n

$$-\,l = -\,a \sin(\omega\,T_n + \varphi_n) + A_n T_n + l + a \sin\varphi_n\,, \tag{45}$$

die — in anderer Form — auch *Bredschneider* angibt.

Die Kugelbewegung wird wiederum durch drei Zahlenfolgen A_n, B_n, φ_n bzw. T_n $(n = 1, 2, 3\ldots)$ charakterisiert. Infolge der Transzendenz von (45) gelingt es jedoch auch hier nicht, ein explizites Bildungsgesetz der Folgen aufzustellen. *Bredschneiders* Nomogramme gestatten, in einem Liniennetz fortgesetzt Punkte zu markieren, die abwechselnd eine Zahl der Folge A_n, dann eine Zahl der Folge T_n abbilden. Insbesondere ist es möglich festzustellen, bei welchen Werten der Konstruktionsgrößen l und a die Folgen $|A_n|$ bzw. T_n einen festen Grenzwert haben. Die dadurch ausgezeichneten Kugelbewegungen mit „symmetrischer Periode" möchte man beim Betrieb des Rüttelgerätes erzielen, damit die zeitliche Folge der Kugelstöße vollkommen gleichmäßig ist.

d) Bei einer derartigen symmetrischen Periode muß für jedes n $x_{n+1} = -x_n$ sein (Bewegungssymmetrie bezüglich des Zentrums $x = 0$), oder ausführlicher geschrieben

$$-a \sin(\omega t' + \varphi_{n+1}) + A_{n+1} t' + B_{n+1} = a \sin(\omega t' + \varphi_n) - A_n t' - B_n$$

für jedes t'. Die erste der dafür notwendigen Voraussetzungen

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \pi\,, \qquad A_{n+1} + A_n = 0\,, \qquad B_{n+1} + B_n = 0$$

lautet bei Verwendung von (44)

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \omega\, T_n = \pi\,.$$

Wegen $t' \leq T_n$ ist daher das Argument der Hyperbelfunktionen in (40) $\omega \delta t' \leq \delta \pi$, bei kleinen Winkeln δ ($\delta \approx 0{,}1$) $\omega \delta t' \leq 0{,}314$. Im Bereich derart kleiner Argumente kann nun mit ausreichender Genauigkeit $\mathfrak{Sin}\, \omega \delta t'$ durch $\omega \delta t'$ und $\mathfrak{Cos}\, \omega \delta t'$ durch 1 ersetzt werden. Der Fehler bleibt dabei unter 5%. Man bedenke bei dieser Abschätzung, daß der Wert der Stoßziffer ε sicherlich mit größeren Fehlern behaftet und zudem nicht bei jedem Stoß der gleiche sein wird. Es hat daher keinen Sinn, eine Laufgleichung von größerer Genauigkeit zu verlangen.

Gleichung (40) lautet nach dieser Vereinfachung

$$x_n = A_n \omega \delta t' + B_n - \delta r \sin(\omega t' + \varphi_n) + x_c\,,$$

oder, wenn man die Konstanten nach (41) und $\delta r = a$ einsetzt,

$$x_n = v_n t' + \omega a t' \cos \varphi_n + l + a \sin \varphi_n - a \sin(\omega t' + \varphi_n)\,. \tag{46}$$

Sie ist nach dieser teilweisen Linearisierung völlig identisch mit (43), woraus hervorgeht, daß *Bredschneiders* Untersuchungen auf einer ausreichend sicheren Grundlage stehen.

5. Der Einfluß der Reibungskraft auf die Kugelbewegung. a) Der Spielraum zwischen Kugel und Führungsrohr sei so klein, daß die Kugel die Rohrwand praktisch immer berührt. Im Berührungspunkt greifen an ihr die Normalkraft $\mathfrak{N} = \mathfrak{i}_1 N_1 + \mathfrak{i}_2 N_2$ und die Reibungskraft $\mathfrak{F} = \mathfrak{i}_3 F$ an. Vorzeichen und Größe der skalaren Zahl F werden vom Bewegungszustand der Kugel bestimmt.

Gleitet die Kugel, so ist (bei hinreichend kleiner Relativ-Drehgeschwindigkeit o)

$$F = -\,sgn(\dot{x})\, \mu_0 \sqrt{N_1^2 + N_2^2}\,.$$

Die Reibungszahl μ_0 wird hier als konstant vorausgesetzt, weil die Schwankungen ihres Wertes bei trockener Reibung relativ klein und zudem nicht mit genügender Sicherheit bekannt sind.

Da F parallel zur Schwerkraft wirkt, geht (38) mit $-mg + F$ statt $-mg$ in die Differentialgleichung der gedämpften Kugelbewegung über:

$$m\ddot{x} + sgn(\dot{x})\, \mu_0 \sqrt{N_1^2 + N_2^2} - m\omega^2 \delta^2 x = m\omega^2 \delta r \sin(\omega t + \varphi) - mg\,. \tag{47}$$

An dieser Stelle muß zunächst der Wurzelausdruck in (47) näher untersucht werden. Aus den ersten beiden Gleichungen (37) folgt, wenn man (35) beachtet und $g/\omega^2 \delta = g'$ setzt,

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= m\omega^2 \delta \left[x \cos \omega t + \frac{2\dot{x}}{\omega} \sin \omega t + \delta\,(g' \cos \omega t - c_1 \sin^2 \omega t - c_2 \sin \omega t \cos \omega t)\right],\\
N_2 &= m\omega^2 \delta \left[x \sin \omega t - \frac{2\dot{x}}{\omega} \cos \omega t + \delta\,(g' \sin \omega t + 3\, c_1 \sin \omega t \cos \omega t - c_2 \cos^2 \omega t)\right],\\
N_1^2 + N_2^2 &= (m\omega^2 \delta^2)^2 \left[\frac{3}{2} c_1^2 + \frac{1}{2} c_2^2 + g'^2 + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) \cos 2\omega t - c_1 c_2 \sin 2\omega t\right.\\
&\qquad \left. - c_1^2 \cos 4\omega t - c_1 c_2 \sin 4\omega t + g' \sin 2\omega t\,(c_1 \sin \omega t - c_2 \cos \omega t)\right]\\
&\quad + (m\omega^2)^2\, 2\, \delta^3 \left[x g' - \frac{4 c_1}{\omega} \dot{x} \sin \omega t\right.\\
&\qquad \left. + \left(x \sin 2\omega t - \frac{2\dot{x}}{\omega} \cos 2\omega t\right)(c_1 \sin \omega t - c_2 \cos \omega t)\right]\\
&\quad + (m\omega^2 \delta)^2 \left(x^2 + \frac{4}{\omega^2} \dot{x}^2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Gleichung (48) läßt ohne weiteres erkennen, daß eine geschlossene Integration von (47) unmöglich ist, solange der Wurzelausdruck nicht wesentlich vereinfacht wird. Dies geschieht,

indem man den vorläufigen, genäherten Wert

$$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = m\,\omega^2\,\delta\sqrt{x^2 + \frac{4\,\dot{x}^2}{\omega^2}} \tag{49}$$

linearisiert:

$$\sqrt{x^2 + \frac{4\,\dot{x}^2}{\omega^2}} \approx \varepsilon_1\,|x| + \varepsilon_2\,\frac{2}{\omega}\,|\dot{x}|\,. \tag{50}$$

Die Linearisierung ist bis auf 4% genau, wenn

im Falle $|x| \geq \frac{2}{\omega}\,|\dot{x}|$: $\quad \varepsilon_1 = 0{,}96\,, \quad \varepsilon_2 = 0{,}398\,,$

im Falle $|x| \leq \frac{2}{\omega}\,|\dot{x}|$: $\quad \varepsilon_1 = 0.398\,, \quad \varepsilon_2 = 0{,}96$

gesetzt wird[1]. Mit (49), (50) und $sgn(\dot{x}) \cdot |x| = sgn(\dot{x}x) \cdot x$ erhält man aus (47) nach Division mit m die geschlossen integrale Gleichung

$$\ddot{x} + 2\,\varepsilon_2\,\mu_0\,\omega\,\delta\,\dot{x} + sgn(\dot{x}x)\,\varepsilon_1\,\mu_0\,\omega^2\,\delta\,x - \omega^2\delta^2 x = \omega^2\,\delta\,r\sin(\omega\,t + \varphi) - g\,. \tag{51}$$

Die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\,\varepsilon_2\,\mu_0\,\omega\,\delta\,\lambda + [sgn\,(\dot{x}x)\,\varepsilon_1\,\mu_0 - \delta]\,\omega^2\,\delta = 0\,,$$

das sind die Zahlen

$$\lambda_1 = -\,\varepsilon_2\,\mu_0\,\omega\,\delta + \omega\,\delta\sqrt{\mu_0^2\varepsilon_2^2 + 1 - sgn\,(\dot{x}x)\,\frac{\varepsilon_1\,\mu_0}{\delta}}\,,$$

$$\lambda_2 = -\,\varepsilon_2\,\mu_0\,\omega\,\delta - \omega\,\delta\sqrt{\mu_0^2\varepsilon_2^2 + 1 - sgn\,(\dot{x}x)\,\frac{\varepsilon_1\,\mu_0}{\delta}}\,,$$

sind im Falle $\dot{x}x < 0$ stets reell, im Falle $\dot{x}x > 0$ dann reell, wenn

$$\mu_0 \leq \frac{\varepsilon_1}{2\,\varepsilon_2^2\,\delta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_1^2}\,4\,\varepsilon_2^2\,\delta^2}\right) \tag{52}$$

ist, bei größeren Reibungskoeffizienten jedoch komplex.

Mit den Abkürzungen $\lambda_1 + \lambda_2 = -\,2\,a$, $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\,b$ bzw. $\lambda_1 - \lambda_2 = i\,2\,b'$ erhält die homogene Lösung von (51) die zweckmäßige Gestalt

$$x_h = e^{-at}\,(A\,\mathfrak{Sin}\,b\,t + B\,\mathfrak{Cos}\,b\,t) \quad \text{bzw.} \quad x_h = e^{-at}\,(A\sin b'\,t + B\cos b'\,t)\,.$$

Hinzu kommt als partikuläre Lösung eine erzwungene Schwingung

$$x_p = \frac{-\,\delta\,r\sin(\omega\,t + \varphi + \psi)}{\sqrt{[1 + \delta\,(\delta - sgn(\dot{x}x)\,\varepsilon_1\,\mu_0)]^2 + (2\,\varepsilon_2\,\mu_0\,\delta)^2}}$$

mit dem Phasenwinkel

$$\psi = \text{arc tg}\,\frac{2\,\varepsilon_2\,\mu_0\,\delta}{1 + \delta\,(\delta - sgn(\dot{x}x)\,\varepsilon_1\,\mu_0)}$$

und eine konstante Auslenkung

$$x_c = \frac{g}{(\delta - sgn(\dot{x}x)\,\varepsilon_1\,\mu_0)\,\omega^2\,\delta}\,.$$

Hat δ wir früher den Wert 0,1 und bleibt $\mu_0 < 0{,}5$, so ist genau genug

$$x_p = -\,\delta\,r\sin(\omega\,t + \varphi + \psi) \quad \text{und} \quad \psi = 2\,\varepsilon_2\,\mu_0\,\delta\,.$$

b) Mit den in Ziff. 4 b) verwendeten Begriffen und Bezeichnungen formuliert man auch hier die Laufgleichung

$$x_n = e^{-at'}\,(A_n\,\mathfrak{Sin}\,b\,t' + B_n\,\mathfrak{Cos}\,b\,t') + x_p + x_c \tag{53}$$

bzw.

$$x_n = e^{-at'}\,(A_n\sin b'\,t' + B_n\cos b'\,t') + x_p + x_c\,.$$

Allerdings erfordert die Darstellung eines Kugellaufes jetzt zwei Gleichungen, da sich alle Konstanten sprunghaft ändern, wenn die Kugel den Nullpunkt der Wegkoordinate ($x = 0$)

[1] Siehe Hütte I, 27. Auflage, S. 72.

passiert. Infolgedessen gilt jede dieser zwei Gleichungen im Mittel nur während einer halben Laufdauer: $t' \leq \frac{1}{2} T_n$. Da bei der symmetrischen Periode $\omega T_n = \pi$ sein muß, ist $t' \leq \pi/2\omega$. Weiterhin kann man wegen des verhältnismäßig kurzen Kugelweges zwischen den Anschlägen erwarten, daß $|x| < 2\,|\dot{x}|/\omega$ bleibt. Dann ist $\varepsilon_1 = 0{,}398$, $\varepsilon_2 = 0{,}96$. Setzt man $\delta = 0{,}1$ voraus, so sind λ_1 und λ_2 stets reell, wenn entsprechend (52) $\mu_0 \leq 0{,}268$ ist. Gerade bei kleinen Reibungszahlen aber ist ein Gleiten der Kugel wahrscheinlich. Daher wird zumeist die Form (53) der Laufgleichung zutreffen. Beachtet man die oben angegebene Grenze für μ_0, so ist $a = \varepsilon_2 \mu_0 \omega \delta \leq 0{,}0256\,\omega$ und $a t' \leq 0{,}0256\,\omega\,\pi/2\omega = 0{,}04$, $\psi = 2\,\varepsilon_2 \mu_3 \delta \leq 0{,}05$, schließlich $e^{-at'} \geq e^{-0{,}04} \approx 1$ und $x_p = -\delta r \sin(\omega t + \varphi + \psi) = -\delta r \sin(\omega t' + \varphi_n + \psi)$. Damit lautet die Laufgleichung

$$x_n = A_n \operatorname{Sin} b t' + B_n \operatorname{Cof} b t' - \delta r \sin(\omega t' + \varphi_n + \psi) + x_c .$$

Da das Argument

$$b t' \leq b \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi \delta}{2} \sqrt{\mu_0^2 \varepsilon_2^2 + 1 - sgn(\dot{x}x)\,\frac{1}{\delta}\,\varepsilon_1 \mu_0}$$

nicht größer als 0,23 werden kann, können auch hier die ersten beiden Glieder durch lineare Funktionen ersetzt werden:

$$x_n = A_n b t' + B_n - \delta r \sin(\omega t' + \varphi_n + \psi) + x_c .$$

Die den Anfangsbedingungen l, v_n angepaßte Laufgleichung

$$x_n = [v_n + \omega \delta r \cos(\varphi_n + \psi)]\, t' + l + \delta r \sin(\varphi_n + \psi) - \delta r \sin(\omega t' + \varphi_n + \psi) \qquad (54)$$

gilt, weil der vereinfachte Ausdruck $\psi = 2\,\varepsilon_2 \mu_0 \delta$ und alle anderen Größen in (54) vom Vorzeichen des Produktes $\dot{x}x$ unabhängig sind, nunmehr für den ganzen Lauf der Kugel.

Setzt man wie früher $\delta r = a$, so ist die genäherte Laufgleichung (54) der gedämpften Kugelbewegung, abgesehen vom sehr kleinen Phasenwinkel ψ, mit der genäherten Laufgleichung (46) der reibungsfreien Kugelbewegung völlig identisch. Das bedeutet, daß der Einfluß der Reibungskraft sich nur im Grade der Genauigkeit der Näherungslösungen äußern kann. In beiden Fällen besteht die Näherung hauptsächlich darin, daß die Exponentialfunktionen der Eigenbewegung durch lineare Funktionen ersetzt wurden. Nachdem die damit verknüpften Fehler wenige Prozent nicht übersteigen — die Summe beider Fehler beträgt momentan höchstens etwa 10% —, ist offensichtlich auch die Wirkung der Reibungskraft überaus gering.

Man erkennt jetzt, daß die provisorische Abschätzung der Normalkraft und damit auch der Reibungskraft in (49) und (50) durchaus genügt, denn die Abweichungen vom genauen Wert können den ohnehin sehr schwachen Reibungseffekt nur unwesentlich verändern. Wenn man demzufolge die Reibung überhaupt vernachlässigt, so wiegt dieser Fehler nicht schwerer als die stets vorhandene Unsicherheit über die Größe der Reibungszahl μ_0 oder der Stoßziffer ε. Die Darstellung der idealisierten, reibungsfreien Kugelbewegung ist daher mit ausreichender Genauigkeit zugleich auch eine Darstellung der wirklichen Kugelbewegung.

c) Diese Feststellung gilt uneingeschränkt auch dann, wenn die Voraussetzung einer ständigen Gleitbewegung nicht erfüllt ist. Tritt nämlich während eines Kugellaufes stückweise eine reine Rollbewegung auf, so wirkt dabei an der Kugel eine Reibungskraft, die bekanntlich keinesfalls größer als $\mu_0 N$ sein kann, häufig jedoch kleiner sein wird. Maßgebend für die Größe der Normalkraft N sind der Kugelweg x und die Kugelgeschwindigkeit $\dot{x}$. Nachdem sich die vollständige Vernachlässigung der Reibung nur wenig auf x und $\dot{x}$ auswirkt, kann die im Mittel weit geringere Differenz zwischen der Reibungskraft bei reiner Rollbewegung und der Reibungskraft bei gleitender Bewegung die Normalkraft praktisch nicht beeinflussen, so daß beim Rollen wie beim Gleiten die gleiche Normalkraft N und höchstens die gleiche Reibungskraft $\mu_0 N$ wirkt.

Infolgedessen ist der Unterschied zwischen reiner Rollbewegung und reibungsfreier Bewegung jedenfalls nicht größer als der Unterschied zwischen Gleitbewegung und reibungsfreier Bewegung, der, wie sich gezeigt hat, vernachlässigt werden darf. Es ist daher nicht notwendig, zu untersuchen, welche Abschnitte eines Laufes von der Kugel streng rollend bzw. gleitend und rollend zurückgelegt werden. Man muß diese Tatsache als sehr günstigen Umstand ansehen, denn es erscheint unmöglich festzustellen, wann und wo eine reine Rollbewegung einsetzen kann. Es müßten in einem solchen Falle erfüllt sein:

1) die folgenden kinematischen Bedingungen: Der Punkt, in dem die Kugel die Rohrwand berührt, ist augenblicklicher Geschwindigkeitspol, hat also keine Geschwindigkeit, während der Vektor seiner Beschleunigung senkrecht zu den aufeinander abrollenden Flächen steht. Daraus folgt: Die Vektoren der relativen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ und der relativen Drehbeschleunigung $\dot{\mathfrak{o}}$ dürfen keine Komponente in Richtung der Rohrachse haben, liegen also beide, wie die Wirkungslinie der Normalkraft, in einer Querschnittsebene des Führungsrohres. Die zur Normalkraft senkrechten Komponenten o_n bzw. $\dot{o}_n$ der Vektoren $\mathfrak{o}$ bzw. $\dot{\mathfrak{o}}$ müssen mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\dot{x}$ und der Schwerpunktsbeschleunigung $\ddot{x}$ in den Beziehungen (R = Kugelradius) $o_n R = \dot{x}$ bzw. $\dot{o}_n R = \ddot{x}$ stehen.

2) die folgende kinetische Bedingung: Das statische Moment der Reibungskraft bezüglich des Kugel-Schwerpunktes hängt von der Drehbeschleunigungskomponente $\dot{o}_n$ und anderen Momenten M_i, die möglicherweise die gleiche Momentenachse haben, ab:

$$-F\,R + \Sigma\, M_i = T\,\dot{o}_n\,.$$

$T = 0{,}4\ m\ R^2$ ist das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich eines Durchmessers. Aus der letzten Gleichung folgt

$$F = \frac{1}{R}\left(\Sigma\, M_i - 0{,}4\ m\ R^2\,\frac{\ddot{x}}{R}\right) = \frac{\Sigma\, M_i}{R} - 0{,}4\ m\ \ddot{x}\,.$$

Man erkennt, daß Größe und Vorzeichen der Reibungskraft durch die Momente M_i und die Schwerpunktsbeschleunigung $\ddot{x}$ bestimmt werden. Da zugleich aber $|F| \leq \mu_0 N$ sein muß, kann eine reine Rollbewegung nur bis zu gewissen maximalen Beschleunigungen auftreten.

Alle diese, der Rollbewegung zugeordneten Bedingungen sind an sich bereits kompliziert, stellen aber nur zusätzliche Forderungen neben den dynamischen Grundgleichungen (23) der relativen Drehbewegung dar, die wegen der variablen Koeffizienten nicht geschlossen integriert werden können.

6. Zusammenfassung. Gegenstand der theoretischen Untersuchungen in dieser Arbeit ist die Bewegung von Kugeln, die in Röhren zwischen zwei Anschlägen hin- und hergeschleudert werden. Die Kugelbewegung kommt dadurch zustande, daß der Röhrenträger eine Taumelschwingung ausführt. Nach kurzer Erläuterung der Konstruktion und Wirkungsweise dieses neuartigen Rüttelgerätes wird gezeigt, daß zum Studium der Kugelbewegung die dynamischen Grundgleichungen der Relativbewegung besonders geeignet sind.

An einen Überblick über die bisher bekannten Darstellungen dieser Bewegungsgleichungen schließt sich eine neue Ableitung der allgemeinsten Grundgleichungen der Relativbewegung eines starren Körpers an, bei der ausschließlich die einfachen Hilfsmittel der technischen Mechanik Verwendung finden und die bis zu expliziten Differentialgleichungen für die Komponenten des relativen Schwerpunkts-Ortsvektors und der relativen Drehgeschwindigkeit fortschreitet. Da je nach Art des zu lösenden Problems die Komponentendarstellung und die Differentiation vektorieller Größen in verschiedenen Bezugssystemen vorteilhaft sein kann, werden die Bewegungsgleichungen entsprechend modifiziert bzw. ihre Anwendung in verschiedenen Systemen erläutert.

Die speziellen Untersuchungen der Kinetik des Rüttelgerätes beginnen mit der Darstellung der idealisierten, reibungsfreien Kugelbewegung, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gehorcht und aus einer aperiodischen „Eigenbewegung" und einer erzwungenen Schwingung besteht. Durch einen Grenzübergang gelangt man zu denselben Gleichungen, die bereits *Bredschneider* aus einer angenäherten Darstellung der Taumelbewegung entwickelt und durch ein nomographisches Verfahren ausgewertet hat.

Schließlich entsteht die gleiche Näherungslösung ein zweites Mal durch Linearisierung von Exponentialfunktionen, die in der genauen Lösung auftreten. Die geringe Größe des Fehlers (höchstens 5%) zeigt, daß *Bredschneiders* Untersuchungen sicher fundiert sind.

Die anschließende Darstellung der durch Reibung behinderten Kugelbewegung führt zunächst auf eine nicht lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, jedoch gelingt es durch geeignete Abschätzung des Normaldrucks eine lineare Differentialgleichung aufzustellen und geschlossen zu integrieren. Erstaunlicherweise weicht diese Lösung so wenig — nicht mehr als 10% — von der reibungsfreien Bewegung ab, daß man im Hinblick auf die stets unsicheren

Kenntnisse über Reibungszahlen und Stoßziffern den Einfluß der Reibung unbedenklich vernachlässigen kann.

Es wird noch gezeigt, daß eine nähere Untersuchung des Bewegungszustandes der Kugel mit einer Unterteilung ihres Weges in Abschnitte einer reinen Rollbewegung und in Abschnitte einer mit Gleiten verbundenen Rollbewegung keine Bedeutung hat. Man erkennt aus einer Zusammenstellung der Rollbedingungen und aus den dynamischen Grundgleichungen der Drehbewegung, die hier überaus komplizierte, veränderliche Koeffizienten haben, daß die relative Drehbewegung der Kugel um ihren Schwerpunkt nicht exakt darstellbar ist und daß daher gar nicht ermittelt werden kann, wann reine Rollbewegung möglich ist.

(Eingegangen am 18. Februar 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W. Reidelbach*, Karlsruhe-Rüppurr, Göhrenstr. 7.

Zur Berechnung von Brückenschwingungen unter rollenden Lasten.

Von E. Marquard.

1. Einleitung. a) Bekannte Lösungen, Übersicht. Seit hundert Jahren beschäftigt sich die angewandte Mechanik mit der Untersuchung der Schwingungen von Brückenhauptträgern unter der Wirkung darüberfahrender Fahrzeuge. Dabei wird fast ausschließlich der beiderseits frei aufliegende Träger konstanten Biegewiderstandes betrachtet. In diesem langen Zeitraum sind nicht nur die Ansätze verfeinert worden, auch die technischen Voraussetzungen haben sich weitgehend verändert. Dies spiegelt sich in den Gedankengängen der bekanntgewordenen Lösungen wieder.

Die durch Beschädigungen an englischen Eisenbahnbrücken ausgelöste Untersuchung[1] von *Stokes* (1849) geht von einer ungefederten rollenden Masse aus, betrachtet hingegen den Träger als masselose Feder. Zur Integration der damit entstehenden Differentialgleichung verwandte *Stokes* eine Reihenentwicklung. Erst viel später wurde von *Zimmermann*[2] (1896) das exakte Integral angegeben. Dieses läßt sich auch auf eine teilweise gefederte Masse ausdehnen, indem die rollende Last in eine Kraft P (ohne Masse) und eine Masse M aufgespalten wird, wobei M nicht gleich P/g sein muß, sondern auch nur einen Bruchteil davon betragen kann, $M = \varepsilon P/g$.

Timoshenko[3] ging (1911, 1932) von ganz entgegengesetzten Voraussetzungen aus in der richtigen Erkenntnis, daß einerseits die Eigenmasse des Trägers und seine Eigenschwingung nicht vernachlässigt werden darf, und andererseits bei den in Frage kommenden Fahrzeugen nur ein geringer Teil der Gesamtmasse ungefedert ist. Er betrachtet daher die rollende Last lediglich als eine konstante masselose Kraft, führt jedoch die gleichmäßig verteilte Eigenmasse des Trägers in die Rechnung ein. Diese Annahmen kommen der Wirklichkeit nahe, wenn die ungefederten Fahrzeugmassen klein und die den Fahrzeugkörper tragenden Federn so weich sind, daß Vertikalbewegungen nur eine unbedeutende Änderung der Federspannung bewirken.

Die Besprechung der verschiedenartigen Annahmen verlangt, wie ersichtlich, eine präzise Unterscheidung der Begriffe Last, Kraft und Masse; in diesem Bericht wird unter

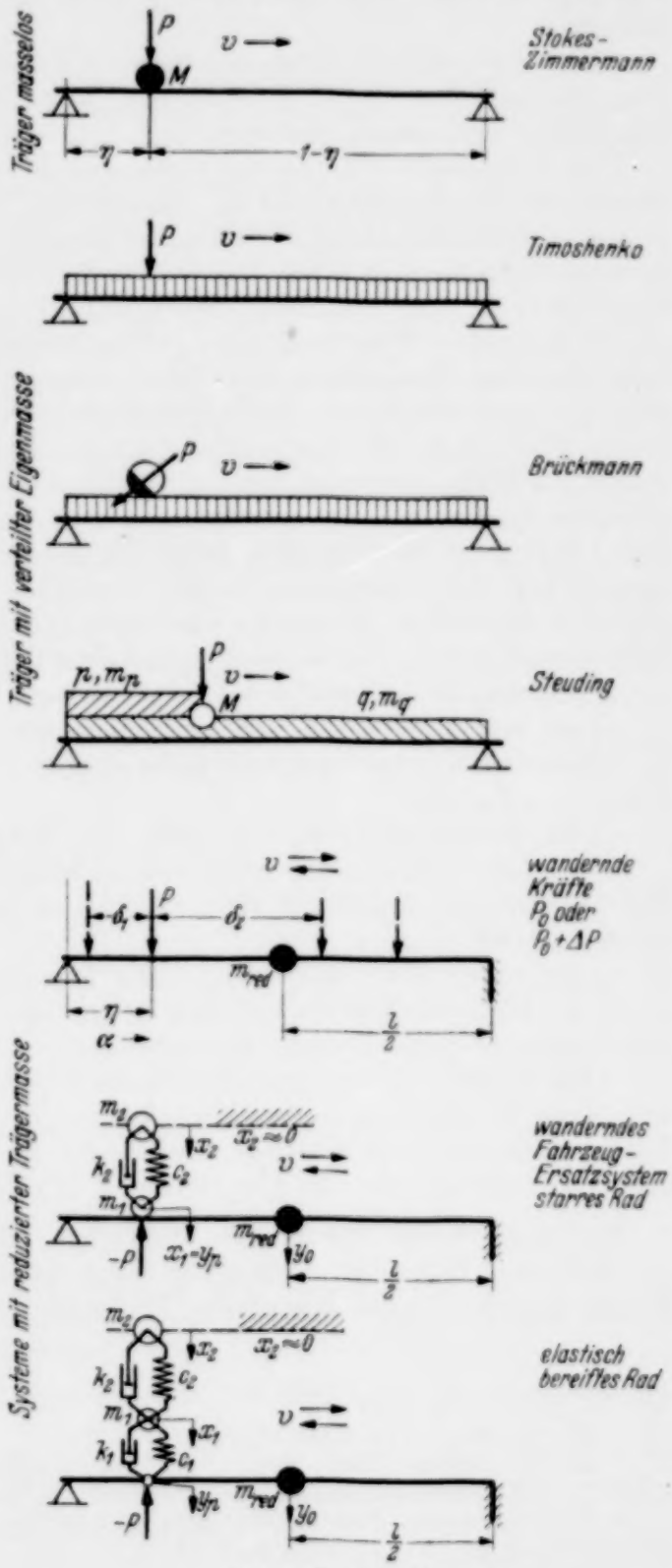

Abb. 1. Ersatzsysteme.

[1] *G. G. Stokes*, Trans. Cambr. Ph. Soc. 8 (1849), S. 707.

[2] *H. Zimmermann*, Die Schwingungen eines Trägers bei bewegter Last, Berlin 1896.

[3] *S. Timoshenko*, Schwingungsprobleme der Technik, übersetzt von Malkin-Helly, Berlin 1932.

der Bezeichnung „Last" offen gelassen, wieweit diese als Kraft oder Masse wirkt, dies wird jeweils besonders angegeben.

Aus der großen Zahl der einschlägigen Arbeiten ist die sehr umfassende Untersuchung[1] von *Steuding* (1934) hervorzuheben; er behandelt, ausgehend von dem allgemeinen Ansatz Bild 1d, folgende Fälle:

a) gleichmäßig über den ganzen Träger verteilte ständige und rollende Last,

b) bewegte Einzelkraft, gleichmäßig verteilte ständige und bewegte Last,

c) bewegte Einzellast (Kraft und Masse), masseloser Träger (*Stokes-Zimmermann*scher Fall),

d) gleichmäßig verteilte ständige Last, bewegte Einzellast.

Gerade für diesen letzten, am meisten interessierenden Fall läßt sich jedoch keine strenge Lösung angeben.

Ansätze zur Berücksichtigung der Massenwirkung der bewegten Last finden sich auch z. B. bei *Jeffcott*[2] und bei *Schallenkamp*[3] (1937), der seine Rechnungen durch Modellversuche erhärtet.

Ferner wurde[4] die Erregung durch Unwuchten an den Lokomotiv-Triebrädern untersucht. Dagegen ist anscheinend das Fahrzeug selbst als schwingungsfähiges System bisher nicht in die Rechnung einbezogen worden.

Die vorgelegten Methoden verlangen fast ausnahmslos einen großen Aufwand an mathematischer Gewandtheit und an Arbeitszeit. Ihre Anwendung ist im allgemeinen auf eine einzelne Last beschränkt, die Behandlung einer Folge von Lasten, wenn überhaupt, nur mit unverhältnismäßigem Aufwand möglich. Leider konnte daher die Theorie nur in sehr beschränktem Umfang zum Rüstzeug des praktischen Ingenieurs werden.

b) Ziel der Untersuchung. Die inzwischen bekannt gewordenen Pläne zur Führung von sehr schnellen Bahnzügen über unabhängig vom Bodenverkehr verlaufende Brückenfahrbahnen machten eine neue grundsätzliche Untersuchung des Problems notwendig, zumal hierbei einige zusätzliche Fragen auftreten, von denen folgende genannt seien: das Verhalten des einerseits eingespannten Trägers konstanten Biegewiderstandes, die Verwendung elastisch bereifter Räder, und das schwingungsdynamische Verhalten des Fahrzeugs auf der schwingenden Fahrbahn. Im folgenden wird eine kurze methodische Zusammenfassung dieser Betrachtungen gegeben; es mußten hierzu Verfahren entwickelt werden, die in den genannten Punkten über die bisher bekannten Lösungen hinausgehen, trotzdem aber mit verhältnismäßig einfachen und damit „ingenieur-brauchbaren" Mitteln ein zutreffendes Bild der Vorgänge geben.

An brauchbare Verfahren sind demnach folgende Forderungen zu stellen:

a) sie sollen auf einfachen mathematisch-physikalischen Grundlagen beruhen;

b) sie sollen ohne größere Schwierigkeiten numerisch durchführbar sein, auch für eine Folge von Lasten;

c) sie dürfen nicht in der Nähe der Eigenwerte versagen,

d) sie sollen auch dann verwendbar sein, wenn die elastischen und Lagerungsverhältnisse des Trägers von den Schulfällen abweichen und nicht analytisch, sondern nur experimentell erfaßbar sind;

e) sie sollen die Einführung einer Eigendämpfung des Trägers zulassen;

f) sie sollen sich nicht auf den Träger allein beschränken, sondern auch das Fahrzeug als schwingungsfähiges System einschließen.

An sich könnte auch weiter gefordert werden, daß Abweichungen des elastischen Verhaltens vom *Hooke*schen Gesetz berücksichtigt werden können; in diesem Fall wäre jedoch die Zulässigkeit der Superposition und damit die Verwendbarkeit von Einflußzahlen nicht mehr gesichert. Diese gilt nur für lineare Differentialgleichungen.

2. Vergleich mit bekannten Methoden. a) *Stokes-Zimmermann.*

Rollt eine Einzellast über einen masselosen, beiderseits frei aufliegenden Träger konstanten Biegewiderstandes, so lautet die Differentialgleichung der Trägerbewegung unter der Last[5]

$$\frac{d^2z}{d\eta^2} - \frac{3\,z}{\beta\,c\,\eta^2\,(1-\eta)^2} = \frac{\beta'}{\beta\,c}\,. \tag{1}$$

[1] *H. Steuding*, Ing.-Arch. 5 (1934), S. 275.

[2] *H. H. Jeffcott*, Phil. Mag. (Ser. 7) 8,66 (1929).

[3] *A. Schallenkamp*, Ing.-Arch. 8 (1937), S. 182.

[4] *B. Brückmann*, Einschwingvorgänge von Brückenhauptträgern infolge periodischer Kräfte aus der Triebradwirkung, Diss. München 1939.

[5] Vgl. Fußnote 1.

Für $\frac{3}{\beta c} > \frac{1}{4}$ ist das *Zimmermann*sche Integral

$$z = \frac{\beta'}{\beta c v}\left(z_1 \int_0^\eta z_2 d\eta - z_2 \int_0^\eta z_1 d\eta\right), \tag{2}$$

mit
$$z_1 = \sqrt{\eta(1-\eta)}\,\sin\left(v \ln \frac{\eta}{1-\eta}\right), \quad z_2 = \sqrt{\eta(1-\eta)}\,\cos\left(v \ln \frac{\eta}{1-\eta}\right)$$
$$v = \sqrt{\frac{3}{\beta c} - \frac{1}{4}}. \tag{3}$$

Darin bedeuten (mit l als Trägerlänge) die dimensionslosen Größen $z = y/l$ die bezogene Durchbiegung, $\eta = v\,t/l$ den bezogenen Ort der wandernden Last, $\beta = P\,l^2/EJ$ und $\beta' = P'l^2/EJ$ Steifigkeitswerte, wobei P die Massenkraft und P' die Kraft der bewegten Last sind, $c = v^2/g\,l$ die Geschwindigkeitswerte, wobei v die Geschwindigkeit der bewegten Last ist.

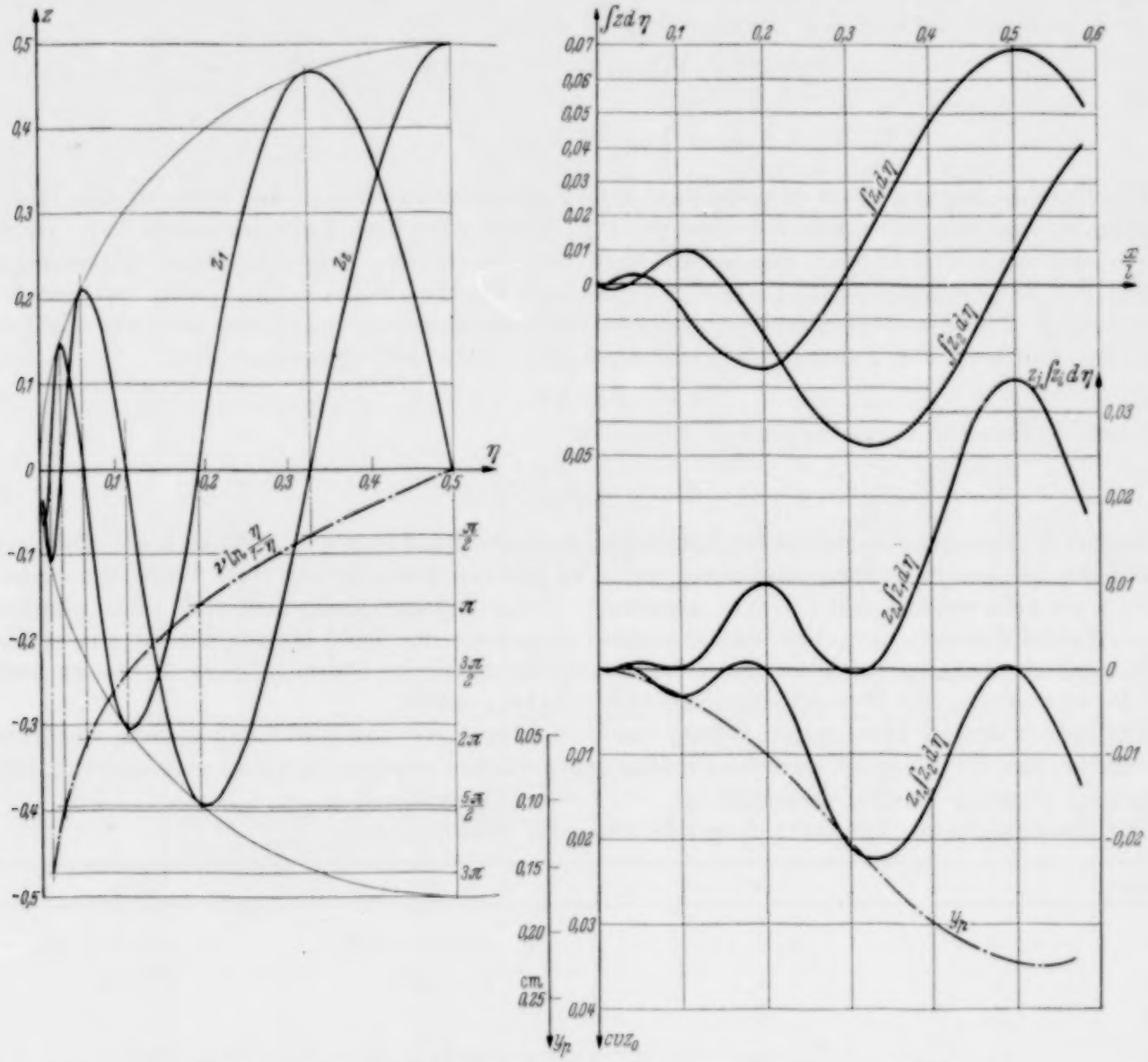

Abb. 2. Auswertung des *Zimmermann*schen Integrals. $v = 300$ km/h Zahlenbeispiel 1.

Zum Vergleich der Verfahren ist der einfachste Fall $\beta = \beta'$ angenommen, d. h. die Last wirkt mit dem vollen Gewicht und ihrer gesamten Masse. Die Integration ist in Abb. 2 an einem Beispiel vorgeführt. Sie umfaßt folgende Arbeitsgänge:

a) Berechnen und Aufzeichnen der Funktionen $v \ln \frac{\eta}{1-\eta} = f(\eta)$ und Einteilen in Abschnitte $\pi/2$, π, $3\pi/2$ ...;

b) Aufzeichnen der Funktionen $z_1 = \varphi_1(\eta)$ und $z_2 = \varphi_2(\eta)$;

c) Planimetrieren von φ_1 und φ_2, d. i. $\int_0^\eta z_1\,d\eta$ und $\int_0^\eta z_2\,d\eta$;

d) Multiplikation $z_1 \int_0^\eta z_2 \, d\eta$ und $z_2 \int_0^\eta z_1 \, d\eta$;

e) Subtraktion $z_1 \int z_2 \, d\eta - z_2 \int z_1 \, d\eta$, Multiplikation mit $1/c\,v$.

Die vertikale Bewegung der Last und des Trägers unter ihr (Lastwegkurve) läßt sich auch durch einen andersartigen Gedankengang gewinnen: Beim Anrollen der Last befinde sich der Träger im spannungslosen Zustand; die statische Durchbiegung infolge seiner Eigenmasse werde wie oben vernachlässigt. Für die bewegte Last ist die Biegesteifigkeit des Trägers über der ersten Stütze unendlich groß, nimmt zwischen den Stützen auf einen Kleinstwert ab und wächst wieder, bis er über der zweiten Stütze wiederum den Wert unendlich erreicht. Belastung des Trägers und senkrechte Bewegungen der Last erfolgen genau so, als werde eine Feder von entsprechend veränderlicher Härte $c_{(x,t)}$, ausgehend vom ungespannten Zustand, durch eine nur senkrecht bewegliche Last (Masse M, Gewicht G) belastet. Die Eindrückungen dieser gedachten Feder entsprechen den Durchbiegungen y_p des masselosen Trägers am jeweiligen Ort der Last, der Lastwegkurve.

Demnach gilt nach dem *d'Alembert*schen Prinzip

$$m\,\ddot{y}_p = G - c_{(x,t)}\,y_p = c_{(x,t)}\,(y_{st} - y_p) \tag{4}$$

oder

$$\ddot{y}_p = g - \frac{c_{(x,t)}}{m}\,y_p \,.$$

Die Beschleunigung $\ddot{y}_p$ ist proportional dem Unterschied zwischen der tatsächlichen Durchbiegung y_p und der statischen Durchbiegung y_{st} unter derselben Last am selben Ort. Da der Träger als masselose Feder angesehen wird, entspricht die angeschriebene Gleichung (4) formal der Bewegungsgleichung eines einfachen Feder-Masse-Systems, nur mit dem Unterschied, daß die Federhärte c nicht konstant, sondern eine Funktion des Orts der Last, bzw. der Zeit ist. Bei konstanter Geschwindigkeit v der bewegten Last gilt

$$x = v\,t = \eta\,l \,. \tag{5}$$

Für den beiderseits frei aufliegenden Träger ist

$$c_{pp} = \frac{3\,EJ}{l^3\,\eta^2\,(1-\eta)^2} \,. \tag{6}$$

Mit dieser Beziehung — oder jeder beliebigen anderen Funktion c — läßt sich die Gleichung ohne Schwierigkeiten schrittweise integrieren, abgesehen vom Anfang (und Ende) der Spannweite, wo c sehr schnell hohe Werte annimmt. Diese Schwierigkeit läßt sich ohne nennenswerten Fehler dadurch umgehen, daß man die Integration erst bei 2 bis 4% der Spannweite beginnt, und als Anfangswerte in erster Näherung die statische Durchbiegung an dieser Stelle und die entsprechende Durchbiegungsgeschwindigkeit wählt.

Zur schrittweisen Integration wurde das von *Meyer zur Capellen*[1] angegebene Verfahren verwendet, das der *Runge-Kutta*schen Näherungsmethode entspricht, wenn man sich mit einer Näherung zweiten Grades begnügt.

Das Rechenschema hat dann folgende einfache Form:

Zeile		0	$\bar{1}$	1
1	$x_0 = v\,t$	$x_0 = v\,t_0$	$x_{\bar{1}} = v\,(t_0 + \Delta t/2)$	$x_1 = v\,(t_0 + \Delta t)$
2	t	t_0	$t_0 + \Delta t/2$	$t_0 + \Delta t$
3	Δt	Δt	//////	
4	y_p	y_{p0}	$y_{p0} + \bar{k}_y = \bar{y}_p$	$y_p + k_y = y_{p1}$
5	$\dot{y}_p$	$\dot{y}_{p0}$	$\dot{y}_{p0} + \bar{k}_{\dot{y}} = \bar{\dot{y}}_p$	$\dot{y}_p + k_{\dot{y}} = \dot{y}_{p1}$
6	k_y	$\bar{k}_y = \dot{y}_{p0}\,\Delta t/2$	$k_y = \bar{\dot{y}}_p\,\Delta t$	
7	c/m	$(c/m)_0$	$(c/m)_{\bar{1}}$	$(c/m)_1$
8	g	981	981	981
9	$-y_p\,c/m$	$-y_{p0}\,(c/m)_0$	$-\bar{y}_p\,(c/m)_{\bar{1}}$	$-y_{p1}\,(c/m)_1$
10	$\ddot{y}_p$	$\ddot{y}_{p0}$	$\bar{\ddot{y}}_p$	$\ddot{y}_{p1}$
11	$k_{\dot{y}\,p}$	$\bar{k}_{\dot{y}} = \ddot{y}_{p0}\,\Delta t/2$	$k_{\dot{y}} = \bar{\ddot{y}}_p\,\Delta t$	

[1] *W. Meyer zur Capellen*, Instrumentelle Mathematik für den Ingenieur, Essen 1952.

Nach diesem Verfahren ist das in Abb. 3 gegebene Beispiel berechnet. Es entspricht vollständig den aus der Literatur bekannten Darstellungen und zeigt ihre charakteristischen Merkmale, nämlich

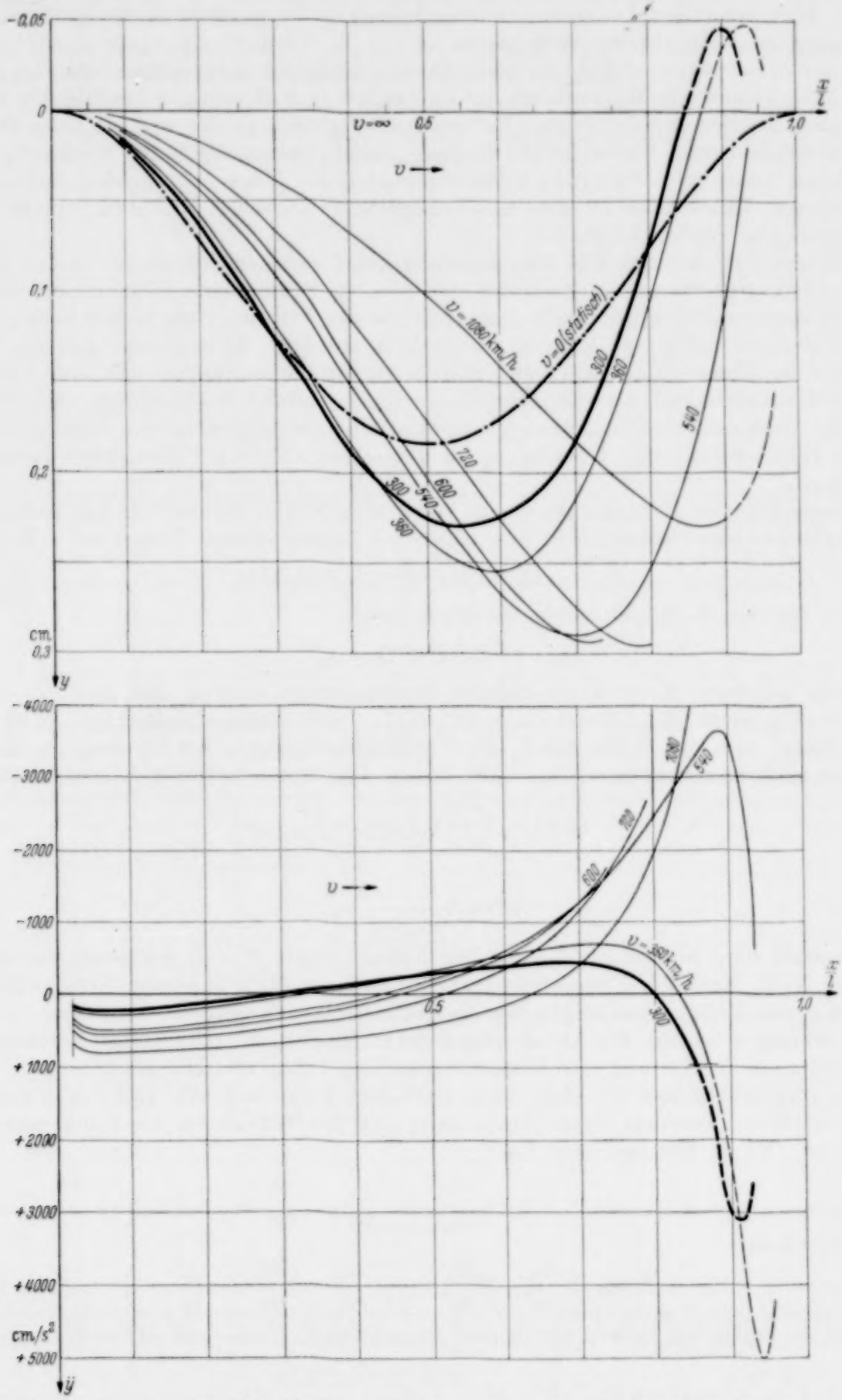

Abb. 3. *Stokes-Zimmermann*scher Fall, Übersicht für verschiedene Geschwindigkeiten der wandernden Masse. Zahlenbeispiel 1.

a) Bei verschwindend geringer Rollgeschwindigkeit entspricht die Lastwegkurve ihrem statischen Wert

$$y_{st} = \frac{g}{c/m} = \frac{981}{\nu^2}. \tag{4'}$$

d) Multiplikation $z_1 \int_0^\eta z_2 \, d\eta$ und $z_2 \int_0^\eta z_1 \, d\eta$;

e) Subtraktion $z_1 \int z_2 \, d\eta - z_2 \int z_1 \, d\eta$, Multiplikation mit $1/c\,v$.

Die vertikale Bewegung der Last und des Trägers unter ihr (Lastwegkurve) läßt sich auch durch einen andersartigen Gedankengang gewinnen: Beim Anrollen der Last befinde sich der Träger im spannungslosen Zustand; die statische Durchbiegung infolge seiner Eigenmasse werde wie oben vernachlässigt. Für die bewegte Last ist die Biegesteifigkeit des Trägers über der ersten Stütze unendlich groß, nimmt zwischen den Stützen auf einen Kleinstwert ab und wächst wieder, bis er über der zweiten Stütze wiederum den Wert unendlich erreicht. Belastung des Trägers und senkrechte Bewegungen der Last erfolgen genau so, als werde eine Feder von entsprechend veränderlicher Härte $c_{(x,t)}$, ausgehend vom ungespannten Zustand, durch eine nur senkrecht bewegliche Last (Masse M, Gewicht G) belastet. Die Eindrückungen dieser gedachten Feder entsprechen den Durchbiegungen y_p des masselosen Trägers am jeweiligen Ort der Last, der Lastwegkurve.

Demnach gilt nach dem *d'Alembert*schen Prinzip

$$m\,\ddot{y}_p = G - c_{(x,t)}\,y_p = c_{(x,t)}\,(y_{st} - y_p)$$

oder

$$\ddot{y}_p = g - \frac{c_{(x,t)}}{m}\,y_p\,. \tag{4}$$

Die Beschleunigung $\ddot{y}_p$ ist proportional dem Unterschied zwischen der tatsächlichen Durchbiegung y_p und der statischen Durchbiegung y_{st} unter derselben Last am selben Ort. Da der Träger als masselose Feder angesehen wird, entspricht die angeschriebene Gleichung (4) formal der Bewegungsgleichung eines einfachen Feder–Masse-Systems, nur mit dem Unterschied, daß die Federhärte c nicht konstant, sondern eine Funktion des Orts der Last, bzw. der Zeit ist. Bei konstanter Geschwindigkeit v der bewegten Last gilt

$$x = v\,t = \eta\,l\,. \tag{5}$$

Für den beiderseits frei aufliegenden Träger ist

$$c_{pp} = \frac{3\,EJ}{l^3\,\eta^2\,(1-\eta)^2}\,. \tag{6}$$

Mit dieser Beziehung — oder jeder beliebigen anderen Funktion c — läßt sich die Gleichung ohne Schwierigkeiten schrittweise integrieren, abgesehen vom Anfang (und Ende) der Spannweite, wo c sehr schnell hohe Werte annimmt. Diese Schwierigkeit läßt sich ohne nennenswerten Fehler dadurch umgehen, daß man die Integration erst bei 2 bis 4% der Spannweite beginnt, und als Anfangswerte in erster Näherung die statische Durchbiegung an dieser Stelle und die entsprechende Durchbiegungsgeschwindigkeit wählt.

Zur schrittweisen Integration wurde das von *Meyer zur Capellen*[1] angegebene Verfahren verwendet, das der *Runge-Kutta*schen Näherungsmethode entspricht, wenn man sich mit einer Näherung zweiten Grades begnügt.

Das Rechenschema hat dann folgende einfache Form:

Zeile		0	$\bar{1}$	1
1	$x_0 = v\,t$	$x_0 = v\,t_0$	$x_{\bar{1}} = v\,(t_0 + \Delta t/2)$	$x_1 = v\,(t_0 + \Delta t)$
2	t	t_0	$t_0 + \Delta t/2$	$t_0 + \Delta t$
3	Δt	Δt	//////	
4	y_p	y_{p0}	$y_{p0} + \bar{k}_y = \bar{y}_p$	$y_p + k_y = y_{p1}$
5	$\dot{y}_p$	$\dot{y}_{p0}$	$\dot{y}_{p0} + \bar{k}_{\dot{y}} = \bar{\dot{y}}_p$	$\dot{y}_p + k_{\dot{y}} = \dot{y}_{p1}$
6	k_y	$\bar{k}_y = \dot{y}_{p0}\,\Delta t/2$	$k_y = \bar{\dot{y}}_p\,\Delta t$	
7	c/m	$(c/m)_0$	$(c/m)_{\bar{1}}$	$(c/m)_1$
8	g	981	981	981
9	$-y_p\,c/m$	$-y_{p0}\,(c/m)_0$	$-\bar{y}_p\,(c/m)_{\bar{1}}$	$-y_{p1}\,(c/m)_1$
10	$\ddot{y}_p$	$\ddot{y}_{p0}$	$\bar{\ddot{y}}_p$	$\ddot{y}_{p1}$
11	$k_{\dot{y}\,p}$	$\bar{k}_{\dot{y}} = \ddot{y}_{p0}\,\Delta t/2$	$k_{\dot{y}} = \bar{\ddot{y}}_p\,\Delta t$	

[1] *W. Meyer zur Capellen*, Instrumentelle Mathematik für den Ingenieur, Essen 1952.

Nach diesem Verfahren ist das in Abb. 3 gegebene Beispiel berechnet. Es entspricht vollständig den aus der Literatur bekannten Darstellungen und zeigt ihre charakteristischen Merkmale, nämlich

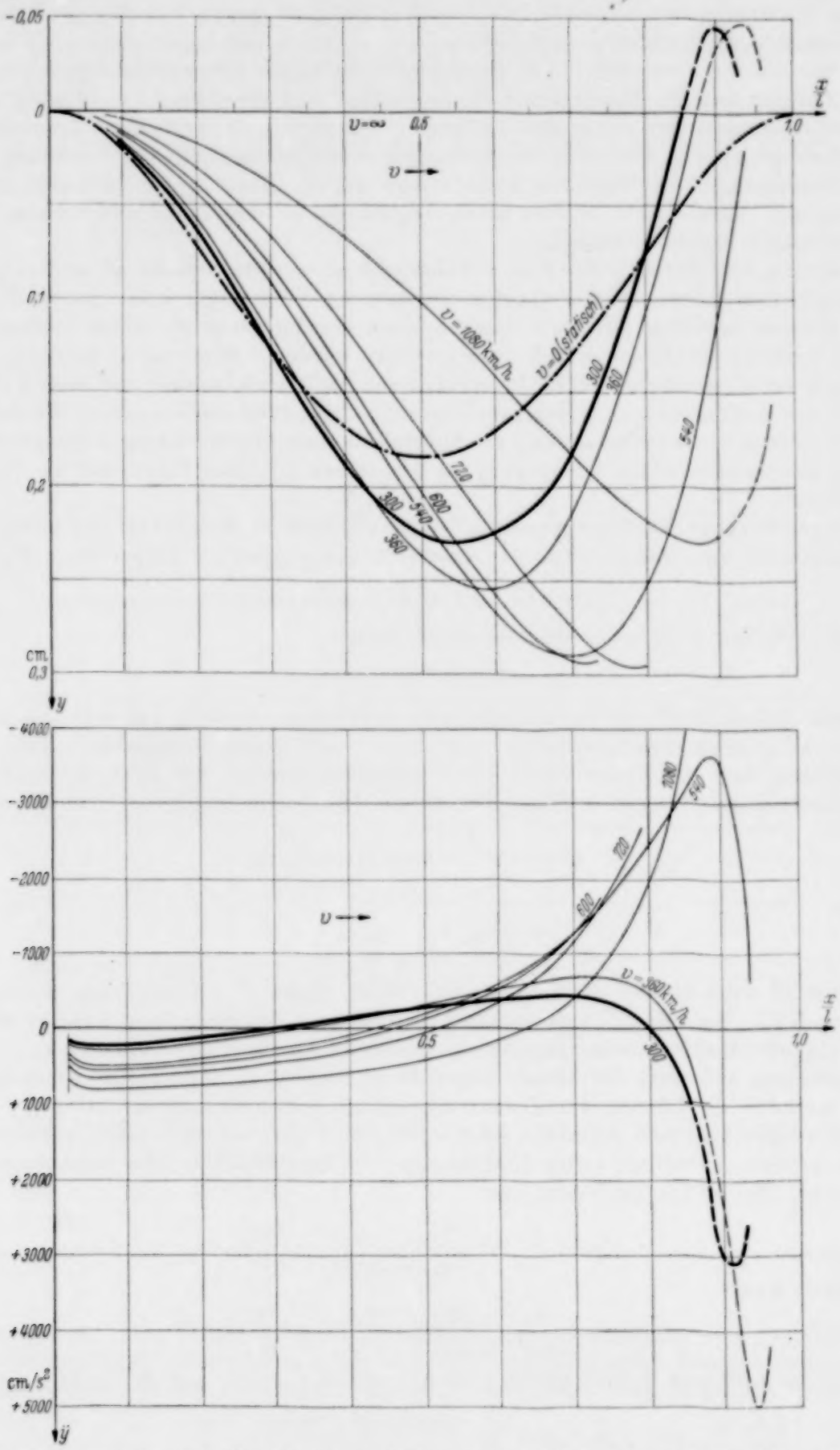

Abb. 3. *Stokes-Zimmermann*scher Fall, Übersicht für verschiedene Geschwindigkeiten der wandernden Masse. Zahlenbeispiel 1.

a) Bei verschwindend geringer Rollgeschwindigkeit entspricht die Lastwegkurve ihrem statischen Wert

$$y_{st} = \frac{g}{c/m} = \frac{981}{\nu^2}. \tag{4'}$$

b) Im andern Grenzfall unendlich großer Rollgeschwindigkeit ist dauernd $y_p = 0$.

c) Zwischen diesen beiden Grenzwerten $\infty > v > 0$ gibt es eine kritische Geschwindigkeit, bei welcher ein Größtwert der dynamischen Durchbiegung unter der Last auftritt.

d) Das Maximum der dynamischen Durchbiegung ist gegenüber der größten statischen Durchbiegung in Rollrichtung verschoben.

e) Da der *Zimmermann*-Effekt im wesentlichen durch das Gegeneinanderwirken der Federkraft des Trägers und der Massenkraft der anfänglich in Fallrichtung beschleunigten Last zustandekommt, ergeben sich bei großen Rollgeschwindigkeiten in der zweiten Trägerhälfte große Bahndrucksteigerungen. Bei mittleren Rollgeschwindigkeiten ergibt die Rechnung auch positive Beschleunigungen (in Richtung Erdmittelpunkt) der Masse, die größer sind als die Erdbeschleunigung. Tatsächlich ist dies nicht möglich, da zwischen Rad und Schiene keine Zugkräfte übertragen werden können.

f) In diesem Fall löst sich das Rad vorübergehend von der Schiene ab und es tritt bei gewissen Geschwindigkeiten beim Anlaufen der zweiten Stütze eine hämmernde Wirkung ein.

Diese Hammerwirkung gilt nach den Angaben der Literatur als sicher beobachtet. Von *Hort*[1] und anderen ist dieses Ergebnis bezweifelt worden. *Hort* macht geltend, die Randbedingungen des *Zimmermann*schen Integrals seien nicht einwandfrei und eine Erhebung der Masse über das Anfangsniveau widerspreche der Energiebilanz des Vorgangs. Nachdem jedoch *Steuding* die *Zimmermann*sche Lösung als Spezialfall eines allgemeineren Ansatzes erhält, und auch diese ganz andersartige Überlegung zu demselben Resultat führt, kann es wohl als gesichert gelten.

Die vorgeschlagene Rechnungsweise ist ohne wesentliche Mehrarbeit auf andere Einspannungsverhältnisse anwendbar. Für den einerseits eingespannten Träger ist z. B.

$$c_{pp} = 12\, EJ/l^3\, \eta^2\, (1-\eta)^2\, (4-\eta) \tag{6'}$$

einzusetzen, für den beiderseits eingespannten Träger

$$c_{pp} = 3\, EJ/l^3\, \eta^3\, (1-\eta)^3\,. \tag{6''}$$

Eine teilweise gefederte Masse kann dadurch berücksichtigt werden, daß man die ungefederte Masse $m' = \varepsilon P/g$ setzt, das Gewicht $G = \varepsilon P + (1-\varepsilon)P$ dagegen beibehält. Dies entspricht der Vorstellung, daß die Feder durch die Vertikalbewegungen des Systems keine nennenswerten Spannungsänderungen erfährt. Mit diesen Annahmen lautet die Grundgleichung

$$m'\ddot{y}_p = G - c_{(x,t)}\, y_p = \frac{\varepsilon P}{g}\, \ddot{y}_p \tag{4''}$$

oder

$$\ddot{y}_p = \frac{g}{\varepsilon} - \frac{c}{m'}\, y_p\,.$$

Im Grenzfall wäre hierbei die Gesamtlast nur als Kraft $P = G$ wirksam, die ungefederte Masse gleich Null. Nach der *Zimmermann*schen Annahme des masselosen Trägers müßte dann für beliebig große Rollgeschwindigkeiten die statische Lastwegkurve entstehen.

Die Rechnung erfordert für kleine ungefederte Massen m' sehr kleine Zeitschritte; entsprechend ist auch die Lösung des *Zimmermann*schen Integrals sehr erschwert.

Mit den vorgeschlagenen Ansätzen kann auch eine Folge von zwei (oder mehreren) Lasten betrachtet werden, allerdings unter Einführung von Einflußzahlen, die Funktionen von Ort nnd Zeit sind. Es ist für die erste Last

$$y_1 = \frac{G_1}{c_{11}} - \frac{M_1}{c_{11}}\, \ddot{y}_1 + \frac{G_2}{c_{12}} - \frac{M_2}{c_{12}}\, \ddot{y}_2\,, \tag{7}$$

für die zweite Last

$$y_2 = \frac{G_2}{c_{22}} - \frac{M_2}{c_{22}}\, \ddot{y}_2 + \frac{G_1}{c_{12}} - \frac{M_1}{c_{12}}\, \ddot{y}_1\,. \tag{7'}$$

Nimmt man die rollenden Lasten gleich groß an, so daß $G_1 = G_2$ und $M_1 = M_2$, so ergibt sich

$$\ddot{y}_2 = g + \frac{1}{M}\, \frac{c_{12}\, c_{22}\, (c_{11}\, y_1 - c_{12}\, y_2)}{c_{12}^2 - c_{11}\, c_{22}}\,, \tag{8}$$

$$y_1 = g + \frac{1}{M}\, \frac{c_{11}\, c_{12}\, (c_{22}\, y_2 - c_{12}\, y_1)}{c_{12}^2 - c_{11}\, c_{22}}\,. \tag{8'}$$

[1] *W. Hort*, Technische Schwingungslehre, 2. Aufl., Berlin 1922.

Die beiden gekoppelten Differentialgleichungen (8) und (8′) sind in der angeschriebenen Form schrittweise integrierbar. Der Arbeitsaufwand dürfte dabei kleiner sein als bei den entsprechenden analytischen Methoden, nimmt jedoch mit der Zahl der rollenden Lasten bei abnehmender Genauigkeit stark zu.

Aus den später folgenden Beispielen geht hervor, daß die *Stokes-Zimmermann*schen Voraussetzungen dem vorliegenden Problem nicht gerecht werden.

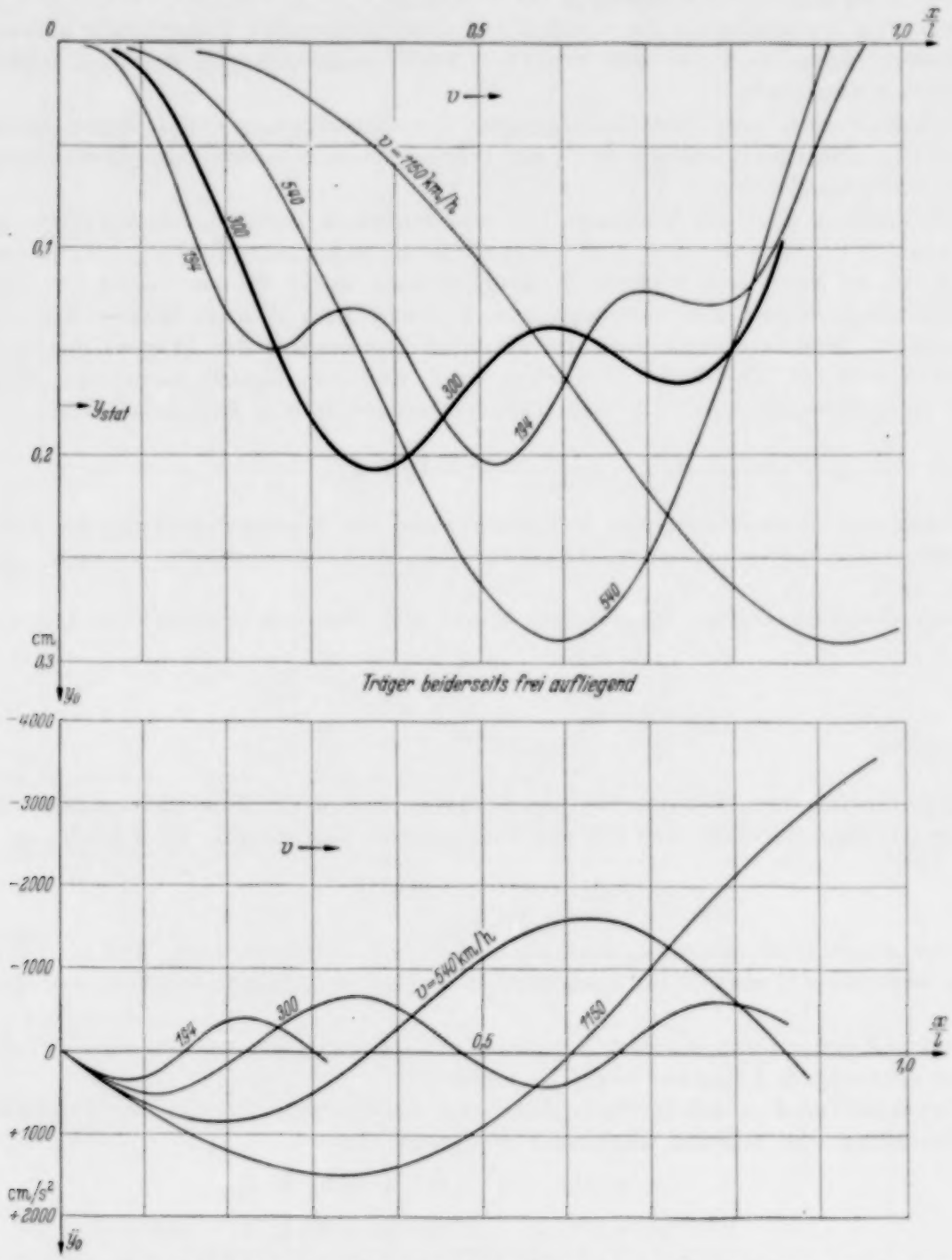

Abb. 4. *Timoshenko*scher Fall, Übersicht für verschiedene Geschwindigkeiten der wandernden Kraft. (Grundschwingung $n=1$.) Zahlenbeispiel 1.

b) *Timoshenko.* Die *Timoshenko*sche Lösung für das Überrollen einer masselosen Kraft über den gleichmäßig mit Masse belegten, beiderseits frei aufliegenden Träger konstanten Biegewiderstandes ergibt für den vertikalen Ausschlag $y = l\,z$ des Trägers an der Stelle ξ

$$y = l\,z = 2\,\beta'\,l\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,\pi\,\xi\,\sin n\,\pi\,\eta}{n^2\,\pi^2\,(n^2\,\pi^2-\gamma\,c)} - \sqrt{\gamma\,c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,\pi\,\xi\,\sin\dfrac{n^2\,\pi^2\,\eta}{\sqrt{\gamma\,c}}}{n^3\,\pi^3\,(n^2\,\pi^2-\gamma\,c)}\right]. \tag{9}$$

Hierin bedeuten (mit l als Trägerlänge zwischen den Stützen) die dimensionslosen Größen $z = y/l$ die bezogene Durchbiegung, $\xi = x_0/l$ die betrachtete Durchbiegungsstelle des Trägers,

$\eta = v\,t/l = x/l$ den bezogenen Ort der wandernden Kraft, $\beta' = P' l^3/EJ$ und $\gamma = q\,l^3/EJ$ Steifigkeitswerte, wobei P' wandernde Kraft und q Eigengewicht je Längeneinheit des Trägers sind, $c = v^2/g\,l$ den Geschwindigkeitswert, wobei v Geschwindigkeit der wandernden Kraft ist, n die Ordnungszahl.

Das erste Glied der Summengleichung gibt die Zwangsschwingung, das zweite die Eigenschwingung. Resonanzstellen entsprechen den Eigenwerten $n^2\pi^2 = \gamma c$. Dabei entfällt auf die Überfahrzeit eine halbe Schwingung n-ter Ordnung.

Will man den Ausschlag an einer beliebigen gleichbleibenden Trägerstelle betrachten, so ist ξ als Festwert einzusetzen, so daß $z = f(\eta)$; sucht man dagegen die Lastwegkurve, so ist $\xi = \eta = \text{var.}$ einzusetzen.

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Schwingung erhält man durch Differentiation von (9). Sie sind ebenfalls der Last P' proportional, so daß die Berechnung für geänderte Last sinngemäß gilt.

Einen Überblick über die Vorgänge bei verschiedenen Rollgeschwindigkeiten gibt Abb. 4.

Wenn man voraussetzen kann, daß lediglich die Grundschwingung ($n = 1$) von wesentlicher Bedeutung ist, so kann durch einen Kunstgriff auch unter diesen Voraussetzungen die Bewegungsgleichung formal auf diejenige eines einfachen Feder–Masse-Systems zurückgeführt werden. Hierzu ersetzt man die verteilte Eigenmasse des Trägers durch eine Punktmasse in Trägermitte, die derart reduziert wird, daß die Eigenfrequenz des Ersatzsystems gleich der Grundfrequenz ($n = 1$) des Trägers mit verteilter Eigenmasse ist

$$\frac{c}{m_{red}} = \pi^4\,EJg/l^4\,q\,. \tag{10}$$

Unter Umständen ist auch noch der Arbeitsaufwand zur Berücksichtigung der Schwingungen $n = 2$ zu vertreten; hierzu ordnet man zwei entsprechend reduzierte Punktmassen symmetrisch am Träger an[1].

Mit einer Punktmasse in Trägermitte ergibt sich für den senkrechten Lastweg

$$y_1 = \frac{G}{c_{11}} - \frac{m_{red}}{c_{01}}\,\ddot{y}_0 - \left\{\frac{M}{c_{11}}\,\ddot{y}_1\right\}, \tag{11}$$

für Trägermitte

$$y_0 = \frac{G}{c_{01}} - \frac{m_{red}}{c_{00}}\,\ddot{y}_0 - \left\{\frac{M}{c_{01}}\,\ddot{y}_1\right\}. \tag{11'}$$

Die eingeklammerten Massenwirkungen fallen bei dem *Timoshenko*schen Ansatz mit $M = 0$ weg. Dadurch ergibt sich für die schrittweise Integration die Gleichung

$$\ddot{y}_0 = \frac{G}{m_{red}}\,\frac{c_{00}}{c_{01}} - \frac{c_{00}}{m_{red}}\,y_0 \tag{12}$$

mit dem konstanten Einflußwert c_{00} und den variablen Einflußwerten c_{11} und c_{01}. Gleichung (12) kann ohne weiteres auf eine Folge wandernder Kräfte ausgedehnt werden, wie später gezeigt wird.

Zunächst soll jedoch durch einen Vergleich mit der strengen Lösung nach (9) die Zulässigkeit des vereinfachten Ansatzes beurteilt werden.

Bei Einsetzen von $\xi = 0{,}5$ in (9) ergeben sich für die Schwingung der Trägermitte in der Summengleichung nur Glieder ungerader Ordnung, da

$$\sin n\,\pi/2 = 0 \quad \text{für } n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$$

$$\sin n\,\pi/2 = \pm 1 \text{ für } n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

Abb. 5 zeigt den Ausschlag $y_0 = z_0\,l$ und die Beschleunigung $\ddot{y}_0 = \ddot{z}_0\,l$ an einem Zahlenbeispiel, das bis $n = 6$ durchgeführt ist. Wie ersichtlich, wird der Ausschlag y_0 bereits durch die beiden Glieder $n = 1$ fast genau wiedergegeben. Die aus der schrittweisen Integration gewonnene Näherungslösung ist punktiert eingezeichnet. Ihre geringen Abweichungen von der exakten Funktion beruhen weniger auf der Vernachlässigung der höheren Glieder, als auf den rechnerischen Ungenauigkeiten des Verfahrens.

Größer ist die Abweichung bei der Beschleunigung, wenn die höheren Glieder weggelassen werden. Diese hochfrequenten Sinusfunktionen legen sich in einem verhältnismäßig breiten Bande um die Kurve $n = 1$; sie bewirken keine wesentliche Änderung des Ausschlages, da ihre positiven und negativen Anteile sich annähernd aufheben. Die lediglich mit der Grund-

[1] *J. Cassens*, Technik 7 (1952), S. 651.

schwingung $n = 1$ berechnete Beschleunigung der Trägermitte entspricht also einem stark geglätteten Mittelwert, der die Funktion jedoch im wesentlichen richtig wiedergibt.

Der senkrechte Weg der bewegten Kraft ergibt sich aus (9) mit $\eta = \xi$ zu

$$y_p = 2\,\beta'\,l\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\,\pi\,\eta}{n^2\,\pi^2\,(n^2\,\pi^2 - \gamma\,c)} - \sqrt{\gamma\,c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,\pi\,\eta\,\sin\dfrac{n^2\,\pi^2\,\eta}{\sqrt{\gamma\,c}}}{n^3\,\pi^3\,(n^2\,\pi^2 - \gamma\,c)}\right]. \qquad (9'')$$

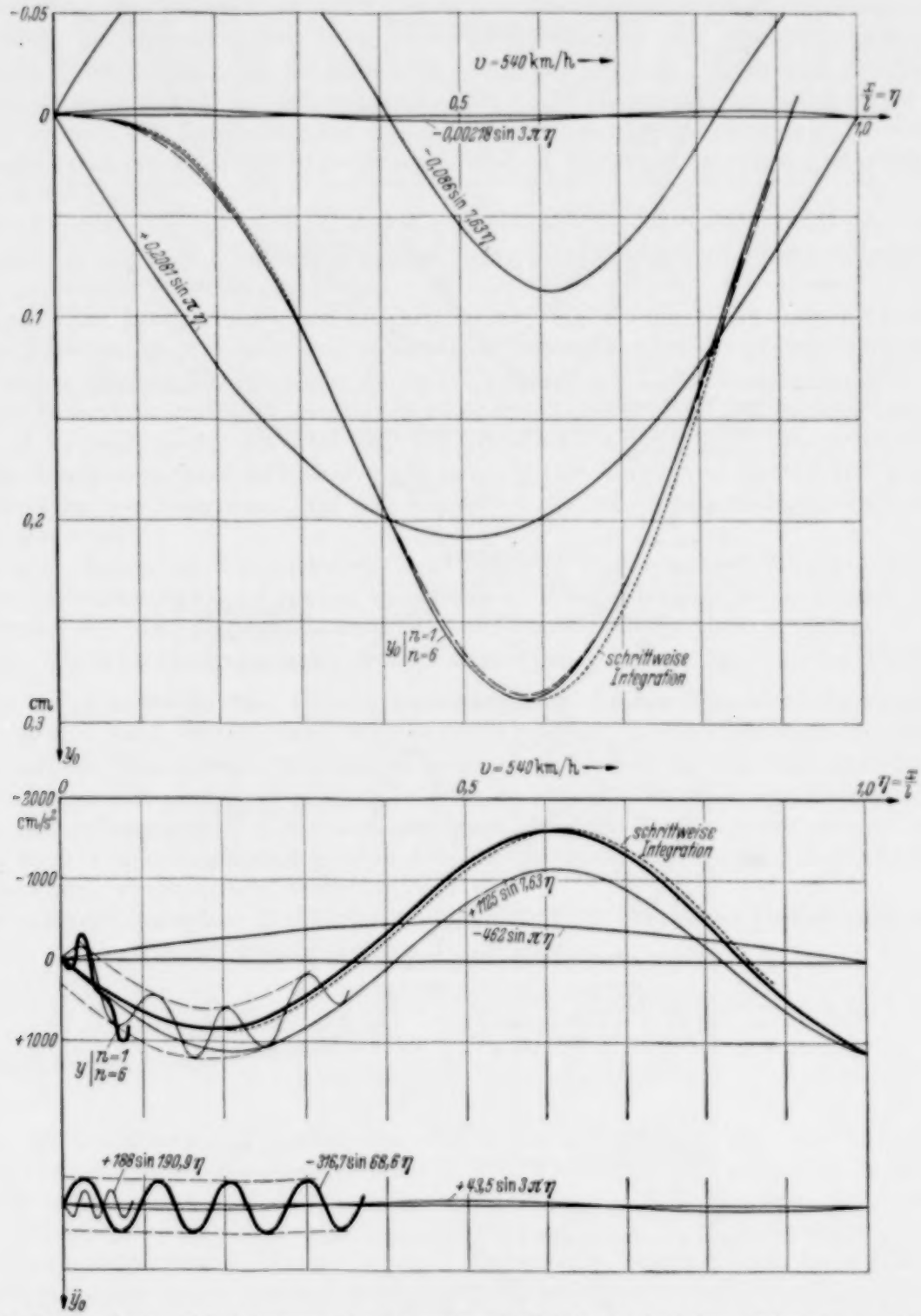

Abb. 5. *Timoshenko*scher Fall, Schwingung der Trägermitte, Einfluß der Glieder höherer Ordnung. $v = 540$ km/h. Zahlenbeispiel 1.

Die erste Summe (Zwangsschwingung) kann mit

$$\sin^2\alpha = 0{,}5\,(1 - \cos 2\,\alpha)\,,$$

die zweite Summe (Eigenschwingung) mit

$$\sin\alpha\,\sin\beta = 0{,}5\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$\eta = v\,t/l = x/l$ den bezogenen Ort der wandernden Kraft, $\beta' = P' l^2/EJ$ und $\gamma = q\,l^3/EJ$ Steifigkeitswerte, wobei P' wandernde Kraft und q Eigengewicht je Längeneinheit des Trägers sind, $c = v^2/g\,l$ den Geschwindigkeitswert, wobei v Geschwindigkeit der wandernden Kraft ist, n die Ordnungszahl.

Das erste Glied der Summengleichung gibt die Zwangsschwingung, das zweite die Eigenschwingung. Resonanzstellen entsprechen den Eigenwerten $n^2\pi^2 = \gamma c$. Dabei entfällt auf die Überfahrzeit eine halbe Schwingung n-ter Ordnung.

Will man den Ausschlag an einer beliebigen gleichbleibenden Trägerstelle betrachten, so ist ξ als Festwert einzusetzen, so daß $z = f(\eta)$; sucht man dagegen die Lastwegkurve, so ist $\xi = \eta =$ var. einzusetzen.

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Schwingung erhält man durch Differentiation von (9). Sie sind ebenfalls der Last P' proportional, so daß die Berechnung für geänderte Last sinngemäß gilt.

Einen Überblick über die Vorgänge bei verschiedenen Rollgeschwindigkeiten gibt Abb. 4.

Wenn man voraussetzen kann, daß lediglich die Grundschwingung ($n = 1$) von wesentlicher Bedeutung ist, so kann durch einen Kunstgriff auch unter diesen Voraussetzungen die Bewegungsgleichung formal auf diejenige eines einfachen Feder–Masse-Systems zurückgeführt werden. Hierzu ersetzt man die verteilte Eigenmasse des Trägers durch eine Punktmasse in Trägermitte, die derart reduziert wird, daß die Eigenfrequenz des Ersatzsystems gleich der Grundfrequenz ($n = 1$) des Trägers mit verteilter Eigenmasse ist

$$\frac{c}{m_{red}} = \pi^4\,E\,J\,g/l^4\,q\,. \tag{10}$$

Unter Umständen ist auch noch der Arbeitsaufwand zur Berücksichtigung der Schwingungen $n = 2$ zu vertreten; hierzu ordnet man zwei entsprechend reduzierte Punktmassen symmetrisch am Träger an[1].

Mit einer Punktmasse in Trägermitte ergibt sich für den senkrechten Lastweg

$$y_1 = \frac{G}{c_{11}} - \frac{m_{red}}{c_{01}}\,\ddot{y}_0 - \left\{\frac{M}{c_{11}}\,\ddot{y}_1\right\}, \tag{11}$$

für Trägermitte

$$y_0 = \frac{G}{c_{01}} - \frac{m_{red}}{c_{00}}\,\ddot{y}_0 - \left\{\frac{M}{c_{01}}\,\ddot{y}_1\right\}. \tag{11'}$$

Die eingeklammerten Massenwirkungen fallen bei dem *Timoshenko*schen Ansatz mit $M = 0$ weg. Dadurch ergibt sich für die schrittweise Integration die Gleichung

$$\ddot{y}_0 = \frac{G}{m_{red}}\,\frac{c_{00}}{c_{01}} - \frac{c_{00}}{m_{red}}\,y_0 \tag{12}$$

mit dem konstanten Einflußwert c_{00} und den variablen Einflußwerten c_{11} und c_{01}. Gleichung (12) kann ohne weiteres auf eine Folge wandernder Kräfte ausgedehnt werden, wie später gezeigt wird.

Zunächst soll jedoch durch einen Vergleich mit der strengen Lösung nach (9) die Zulässigkeit des vereinfachten Ansatzes beurteilt werden.

Bei Einsetzen von $\xi = 0{,}5$ in (9) ergeben sich für die Schwingung der Trägermitte in der Summengleichung nur Glieder ungerader Ordnung, da

$$\sin n\,\pi/2 = 0 \quad \text{für } n = 2,\ 4,\ 6, \ldots$$

$$\sin n\,\pi/2 = \pm 1 \text{ für } n = 1,\ 3,\ 5, \ldots$$

Abb. 5 zeigt den Ausschlag $y_0 = z_0\,l$ und die Beschleunigung $\ddot{y}_0 = \ddot{z}_0\,l$ an einem Zahlenbeispiel, das bis $n = 6$ durchgeführt ist. Wie ersichtlich, wird der Ausschlag y_0 bereits durch die beiden Glieder $n = 1$ fast genau wiedergegeben. Die aus der schrittweisen Integration gewonnene Näherungslösung ist punktiert eingezeichnet. Ihre geringen Abweichungen von der exakten Funktion beruhen weniger auf der Vernachlässigung der höheren Glieder, als auf den rechnerischen Ungenauigkeiten des Verfahrens.

Größer ist die Abweichung bei der Beschleunigung, wenn die höheren Glieder weggelassen werden. Diese hochfrequenten Sinusfunktionen legen sich in einem verhältnismäßig breiten Bande um die Kurve $n = 1$; sie bewirken keine wesentliche Änderung des Ausschlages, da ihre positiven und negativen Anteile sich annähernd aufheben. Die lediglich mit der Grund-

[1] *J. Cassens*, Technik 7 (1952), S. 651.

schwingung $n = 1$ berechnete Beschleunigung der Trägermitte entspricht also einem stark geglätteten Mittelwert, der die Funktion jedoch im wesentlichen richtig wiedergibt.

Der senkrechte Weg der bewegten Kraft ergibt sich aus (9) mit $\eta = \xi$ zu

$$y_p = 2\,\beta'\,l\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\,\pi\,\eta}{n^2\,\pi^2\,(n^2\,\pi^2 - \gamma\,c)} - \sqrt{\gamma\,c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,\pi\,\eta\,\sin\dfrac{n^2\,\pi^2\,\eta}{\sqrt{\gamma\,c}}}{n^3\,\pi^3\,(n^2\,\pi^2 - \gamma\,c)}\right]. \qquad (9'')$$

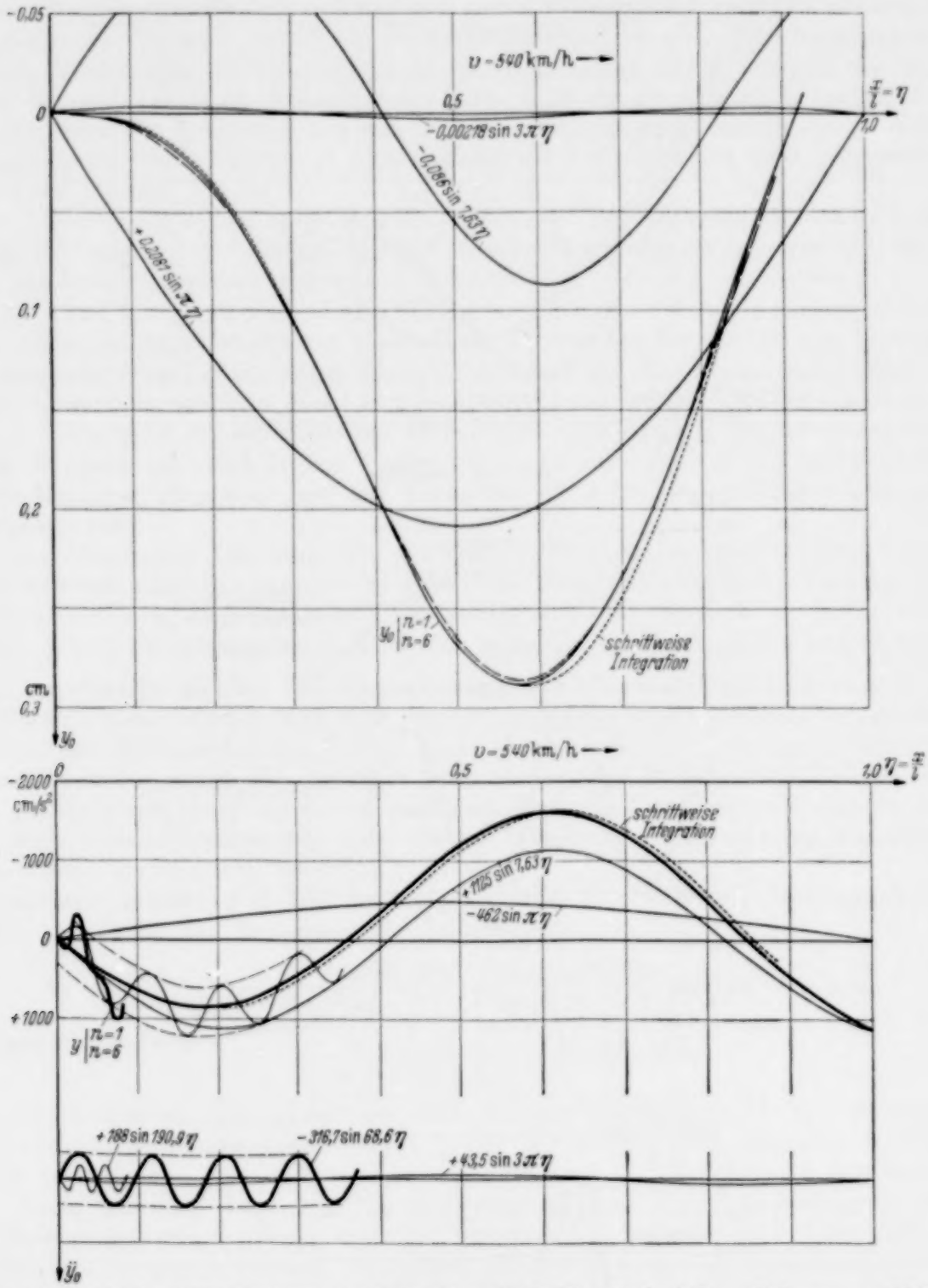

Abb. 5. *Timoshenko*scher Fall, Schwingung der Trägermitte, Einfluß der Glieder höherer Ordnung. $v = 540$ km/h. Zahlenbeispiel 1.

Die erste Summe (Zwangsschwingung) kann mit

$$\sin^2\alpha = 0{,}5\,(1 - \cos 2\,\alpha)\,,$$

die zweite Summe (Eigenschwingung) mit

$$\sin\alpha\,\sin\beta = 0{,}5\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

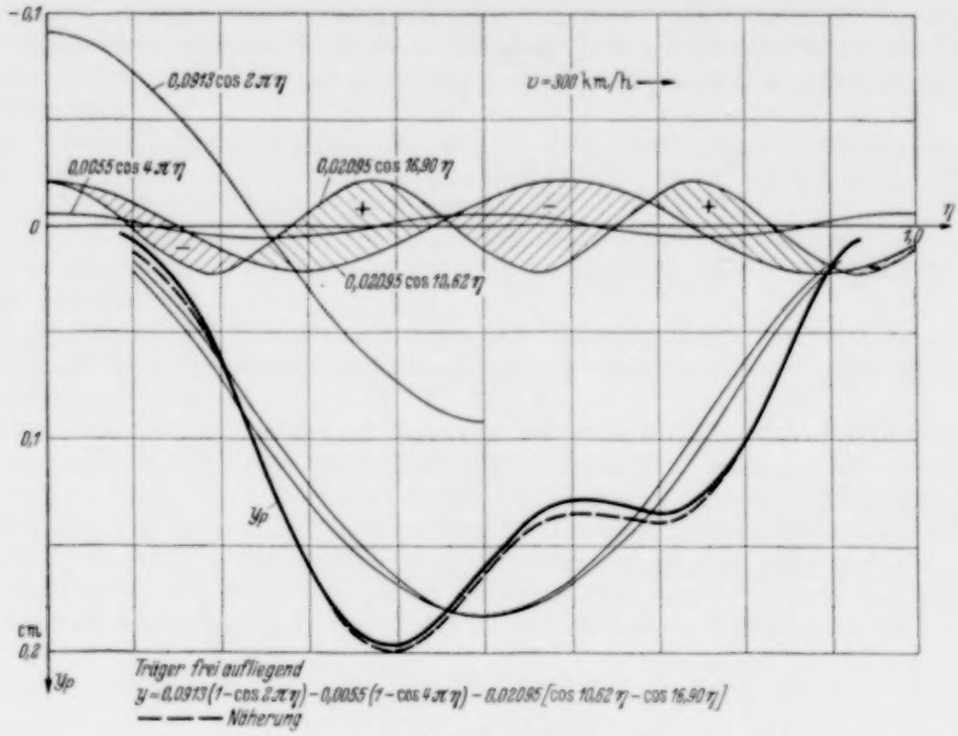
0,0913 cos 2π η
υ = 300 km/h
0,0055 cos 4π η
0,02095 cos 16,90 η
0,02095 cos 10,62 η
η
yp
cm
Träger frei aufliegend
y = 0,0913 (1 − cos 2π η) − 0,0055 (1 − cos 4π η) − 0,02095 [cos 10,62 η − cos 16,90 η]
Näherung

Abb. 6a. Ausschläge.

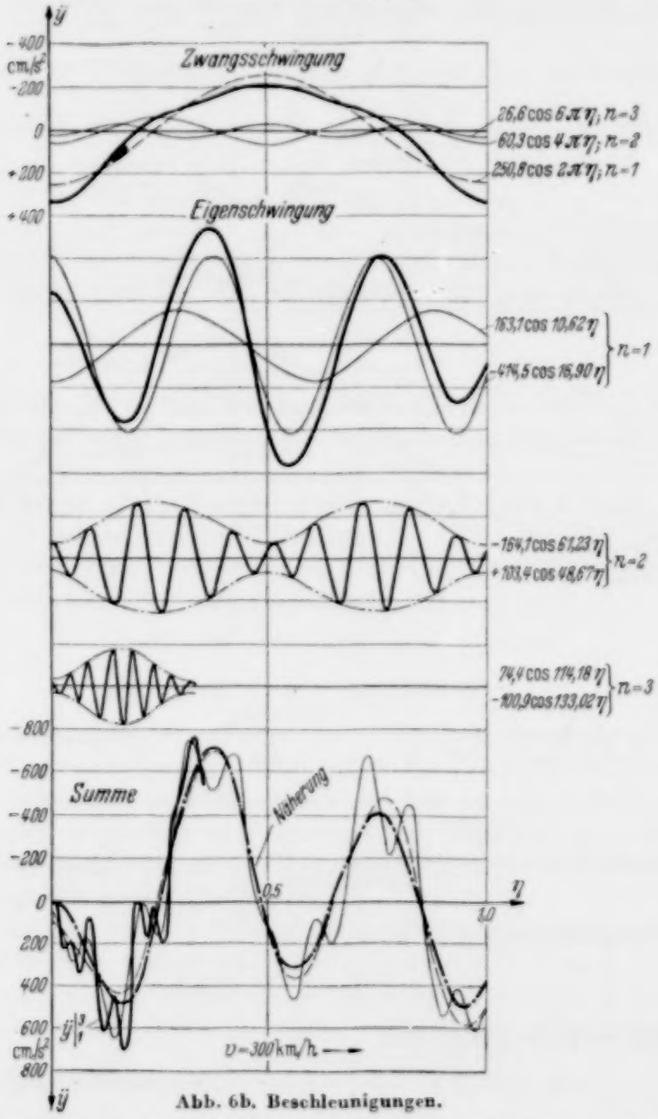

Abb. 6b. Beschleunigungen.

Abb. 6. *Timoshenko*scher Fall, Lastwegkurve, Einfluß der Glieder höherer Ordnung. $v = 300$ km/h. Zahlenbeispiel 1.

auch geschrieben werden

$$y_p = 2\,\beta'\,l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}5\,(1-\cos 2\,n\,\pi\,\eta)}{n^2\,\pi^2\,(n^2\,\pi^2-\eta\,\varepsilon)} - \sqrt{\gamma\,\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}5\left[\cos\left(\frac{n^2\,\pi^2}{\sqrt{\gamma\,\varepsilon}}-n\,\pi\right)\eta-\cos\left(\frac{n^2\,\pi^2}{\sqrt{\gamma\,\varepsilon}}+n\,\pi\right)\eta\right]}{n^3\,\pi^3\,(n^2\,\pi^2-\gamma\,\varepsilon)}\right|. \tag{9'''}$$

Alle Glieder beider Summen müssen sowohl für $\eta = 0$, als auch für $\eta = 1$ gleich Null werden. Aus der zweiten Schreibweise läßt sich ablesen, daß die Eigenschwingungen höherer Ordnung ausgesprochene Schwebungen mit je n Schwingungsbäuchen und Schwingungsknoten darstellen. Diese Verhältnisse sind in Abb. 6 an einem weiteren Zahlenbeispiel anschaulich gemacht. Im Beispiel liegen die Schwebungen mit > 20 Hz im akustisch hörbaren Bereich. Wenn sie sich über die Laufrollen auf das Fahrzeug übertragen, können sie als Vibrationen und Dröhngeräusche lästig werden; in diesem Fall sind Vorkehrungen zum „Entdröhnen" des Fahrkörpers zu treffen.

Auch die Darstellung Abb. 6 zeigt, daß die Glieder der Beschleunigung weit schlechter konvergieren als diejenigen des Ausschlages. Bei Vernachlässigung der höheren Glieder entsteht eine stark geglättete Mittelwertskurve.

Die schrittweise Integration ist ohne weiteres auch für den einerseits eingespannten Träger und andere Einspannungsverhältnisse anwendbar. Inzwischen ist die strenge Lösung für den einerseits eingespannten Träger unter Berücksichtigung der Rotationsträgheit von *K. Westphal* gefunden worden, worüber gesondert berichtet werden soll. Die Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens der schrittweisen Integration wird dann besonders vorteilhaft, wenn a) beliebige Einspannungsverhältnisse vorliegen, b) eine Folge von Lasten betrachtet wird, oder c) die Untersuchung auch auf das Verhalten des schwingungsfähigen Fahrzeugs ausgedehnt werden soll.

Wegen der elastischen Unsymmetrie des einerseits eingespannten Trägers wird hier die Lösung für die beiden Fahrtrichtungen verschieden. Ein Zahlenbeispiel ist in Abb. 7 gegeben. Die Fahrtrichtung vom eingespannten zum aufliegenden Trägerende erscheint sowohl hinsichtlich der Ausschläge als auch der Beschleunigungen günstiger als die umgekehrte.

3. Folge wandernder Kräfte. Die Untersuchung einer Lastenfolge durch Superposition der Lösungen für eine Einzellast ist nicht ohne weiteres möglich, da die nachfolgenden Lasten beim Auffahren auf die Spannweite den Träger nicht in demselben Spannungszustand vorfinden, der den Anfangsbedingungen für die erste Last entsprach. In manchen Fällen ist zwar die Änderung der Anfangsbedingungen von geringem Einfluß. Der folgende Ansatz kommt jedoch ohne diese Vernachlässigung aus, da bei der schrittweisen Integration die Änderung des Anfangszustandes automatisch berücksichtigt wird.

Folgen mehrere masselose Kräfte (beliebiger Größe) in gegebenen (beliebigen) Abständen aufeinander, so gilt für die Bewegung der Trägermitte

$$\ddot{y}_0 = \frac{G_1}{m_{red}}\,\frac{c_{00}}{c_{0p}} + \frac{G_2}{m_{red}}\,\frac{c_{00}}{c_{0q}} + \cdots - \frac{c_{00}}{m_{red}}\,y_0 = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots - \varkappa\,y_0\,. \tag{13}$$

In der abgekürzten Form

$$\ddot{y}_0 + \varkappa\,y_0 = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots$$

entspricht die Gleichung (13) formal der Differentialgleichung eines einfachen Feder-Masse-Systems, wobei die Einflußwerte ζ_i die Wirkungen der rollenden Kräfte auf die Trägermitte wiedergeben und damit einer zeitabhängigen Erregung des Systems entsprechen. Diese bewirkt einen aus Eigenschwingung und Zwangsschwingung zusammengesetzten Bewegungsverlauf. Wenn also die Funktionen ζ_i bekannt sind, kann (13) ohne weiteres schrittweise integriert werden. Auch kann näherungsweise ein Dämpfungsglied $k\,\dot{y}_0$ hinzugefügt werden, falls man annehmen kann, die Dämpfungskraft greife in Trägermitte an und sei eine Funktion der Bewegungsgeschwindigkeit an dieser Stelle. Über die Zulässigkeit einer solchen Annahme und die Größe der Ersatzdämpfung kann die Nachrechnung einfacher Schwingungsversuche am Träger Aufschluß geben.

Für den einerseits eingespannten Träger ergibt sich unter Weglassung des Dämpfungsgliedes mit den Einflußzahlen

$$c_{00} = \frac{768\,EJ}{7\,l^3}\,, \tag{6'''}$$

$$c_{pp} = \frac{12\,EJ}{l^3\,\eta_1^2\,(\eta_1^4 - 6\,\eta_1^2 + 8\,\eta_1 - 3)}, \tag{6'V}$$

$$c_{0p} = \frac{96\,EJ}{l^3\,(11\,\alpha^3 - 24\,\alpha^2 + 15\,\alpha - 2)} \quad \text{bzw.} = \frac{96\,EJ}{l^3\,\alpha\,(5\,\alpha^2 - 3)} = \frac{96\,EJ}{l^3\,\varrho}\,; \tag{6V}$$

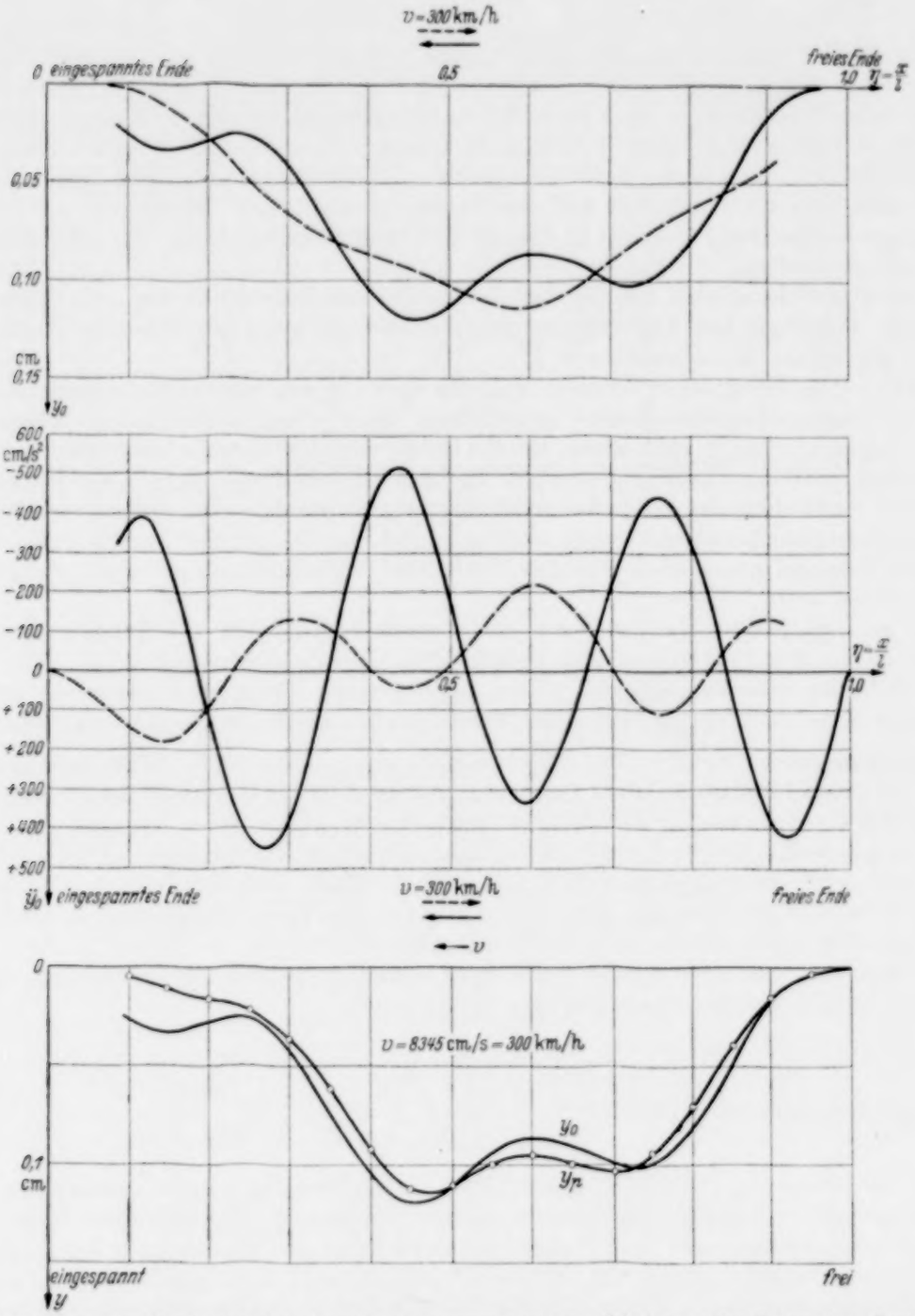

Abb. 7. Überfahrt einer Einzelkraft über den einerseits eingespannten Träger, Schwingung der Trägermitte, Beschleunigung in Trägermitte, Lastwegkurve. $v = 300$ km/h. Zahlenbeispiel 2.

hierin ist $\alpha = a/l$ der bezogene Abstand vom freien Trägerende;

$$\frac{c_{00}}{c_{0p}} = \frac{8}{7}\,\varrho\,.$$

$$c_{pq} = \frac{12\,EJ}{l^3\,[\alpha^2\,(\alpha^4 - 6\,\alpha^2 + 8\,\alpha - 3) + \delta^3\,\alpha\,(\alpha^2 - 3) + 3\,\delta^2\,\alpha\,(\alpha^3 - 3\,\alpha + 2) + 3\,\delta\,\alpha\,(\alpha^4 - 4\,\alpha^2 + 4\,\alpha - 1)]} \tag{6VI}$$

hierin ist $\delta = d/l$ der bezogene Lastabstand;

$$\ddot{y}_0 = \frac{G}{m_{red}} \frac{8}{7} \sum \varrho - \frac{c_{00}}{m_{red}} y_0 \,. \tag{13''}$$

Zur Berechnung der Lastwegkurve dienen die Gleichungen

$$y_p = \frac{G_1}{c_{pp}} + \frac{G_2}{c_{pq}} + \frac{G_3}{c_{pr}} + \cdots - \frac{m_{red}}{c_{0p}} \ddot{y}_0 \,, \tag{14}$$

$$y_q = \frac{G_2}{c_{qq}} + \frac{G_1}{c_{pq}} + \frac{G_3}{c_{qr}} + \cdots - \frac{m_{red}}{c_{0q}} \ddot{y}_0 \quad \text{usw.} \tag{14'}$$

und mit $G_1 = G_2 = \cdots$

$$y_p = G\left(\frac{1}{c_{pp}} + \frac{1}{c_{pq}} + \cdots\right) - \frac{m_{red}}{c_{0p}} \ddot{y}_0 = G \sum \tau_p - \frac{m_{red}}{c_{0p}} \ddot{y}_0 \,,$$

$$y_q = G\left(\frac{1}{c_{qq}} + \frac{1}{c_{pq}} + \cdots\right) - \frac{m_{red}}{c_{0q}} \ddot{y}_0 = G \sum \tau_q - \frac{m_{red}}{c_{0q}} \ddot{y}_0 \,.$$

Es ist zweckmäßig, die von der Rollgeschwindigkeit unabhängigen Funktionen ϱ, $\Sigma\varrho$ und $\Sigma\tau$ sowie m_{red}/c_{0i} genau zu berechnen und aufzuzeichnen, so daß sie für die Rechnung mit verschiedenen Lasten, Lastabständen und Rollgeschwindigkeiten verfügbar sind. Der Wert ϱ braucht nur einmal berechnet zu werden; die Summen $\Sigma\varrho$ ergeben sich durch jeweilige zeichnerische Versetzung um den Lastabstand δ und Addition. In ähnlicher Weise sind die Funktionen τ für vorlaufende und nachlaufende Lasten gleichen Lastabstandes lediglich um diesen Abstand versetzt.

Das Rechenschema zur schrittweisen Integration der Gleichungen (13) und (14) hat folgende Form:

	Zeile		
	1	$x = v\,t$	
	2	$\eta_j = x/l$	
	3	t	
	4	Δt	
	5	y_0	
	6	$\dot{y}_0$	
	7	k_{y_0}	
aus Kurvenblatt	8	$\Sigma\varrho$	
[1])	9	$\frac{8}{7}\frac{G}{m_{red}}\Sigma\varrho$	
	10	$-\frac{c_{00}}{m_{red}} y_0$	
	11	$\ddot{y}_0$	
	12	$k_{\dot{y}_0}$	
aus Kurvenblatt	13	ϱ	
aus Kurvenblatt	14	$\Sigma\tau_p$	
[1])	15	$G\Sigma\tau_p$	
	16	$-\frac{m_{red}\, l^3\, \varrho}{96\, EJ} \ddot{y}_0$	
	17	y_p	
[2])	18	Δy_p	
[2])	19	$\dot{y}_p$	

Bei dieser Untersuchung, die nicht in aller Ausführlichkeit wiedergegeben werden kann, interessieren besonders die Möglichkeiten der Resonanz mit der Grundschwingung des Trägers. Für das als willkürliches Beispiel gewählte System Abb. 8 sind zwei derartige Resonanzen

[1]) Bei den Rechnungen des folgenden Abschnitts tritt hier an die Stelle des konstanten Gewichts G die schwankende Kraft P.

[2]) Bei hinreichend kleinen Schritten Δt ist nach graphischem Ausgleich der Funktion $\dot{y}_p$ auch die Bestimmung von $\ddot{y}_p$ durch Differentiation möglich.

denkbar, die eine aus der Wirkung der kleinen Lastabstände $d = 1{,}5$ m bei der kritischen Geschwindigkeit $v_{kr} = d \cdot f_e = 1{,}5 \cdot 23{,}54 = 35{,}25$ m/s, eine weitere aus der Wiederkehr der Gruppe von vier gleichweit voneinander entfernten Lasten nach je 7 m, mit der kritischen Geschwindigkeit $v_{kr} = 7 \cdot 23{,}54 = 165$ m/s. Diese zweite Kritische liegt allerdings weit über der möglichen Höchstgeschwindigkeit.

In beiden Fällen ist eine Anfachung der Trägerschwingung gegeben. Diese Geschwindigkeiten sind demnach als Dauergeschwindigkeiten zu vermeiden. Aus der Berechnung einer größeren Zahl von Schwingungen ist zu ersehen, daß die Amplituden nicht etwa exponentiell, sondern annähernd linear zunehmen. Wenn man die Einflußfunktion, wie im vorliegenden Fall, näherungsweise durch Sinus- und Cosinusglieder mit zwei verschiedenen Frequenzen ersetzen kann, so kommt man auch analytisch zu demselben Ergebnis; der Ausschlag in Trägermitte erhält dann die Form

$$y_0 = C_0 + C_1 t \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t + C_4 \sin p \omega t + C_5 \cos p \omega t .$$

Nur das zweite Glied wächst linear mit der Zeit.

Aus diesen Überlegungen läßt sich also die Größe der Anfachung näherungsweise bestimmen. Sie ist bei den vorliegenden Verhältnissen in der Regel kleiner als die zu erwartende Dämpfung im Träger, so daß ein kurzzeitiges Durchfahren des Resonanzbereichs unbedenklich erscheint.

In vielen Fällen reicht bereits die Betrachtung der Erregerfunktion $\Sigma \varrho$ hin zur Beurteilung der Anfachung und ihrer Größe.

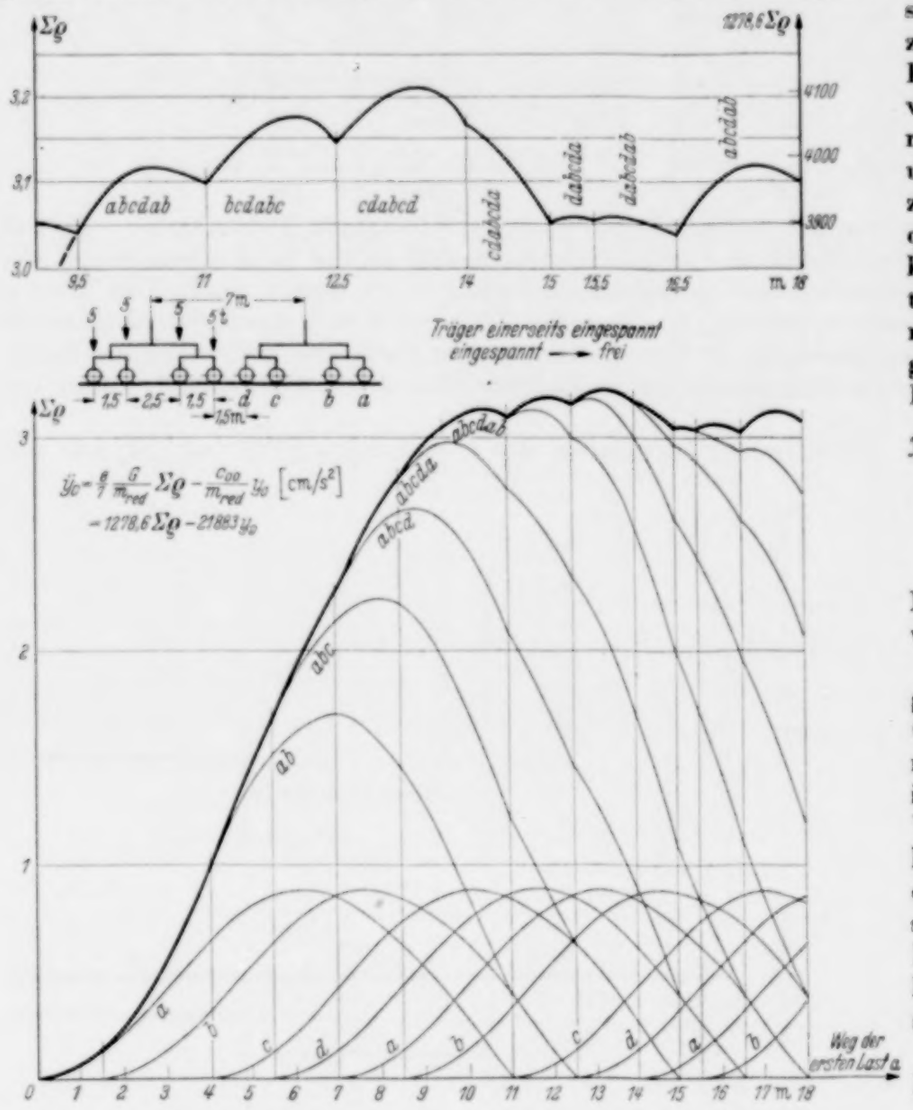

Abb. 8. Überfahrt einer Folge von Kräften über den einerseits eingespannten Träger, Einflußzahlen für Trägermitte. Zahlenbeispiel 2.

4. Bewegtes gefedertes und gedämpftes System. Formal sind für die gestellte Aufgabe zwei verschiedene Ersatzsysteme vorzusehen, je nachdem, ob die Laufrollen als starr (Stahlrad) oder als elastisch (Bereifung) anzusehen sind (Abb. 1).

Im ersten Fall (Stahlrad) ist die Bahnkraft zwischen Laufrolle und Schiene gegeben durch

$$P = P_0 + c_2 (x_2 - y_p) + k_2 (\dot{x}_2 - \dot{y}_p) - m_1 \ddot{y}_p . \tag{15}$$

Für die Bewegung der Aufbaumasse gilt nach dem *d'Alembert*schen Prinzip

$$- m_2 \ddot{x}_2 = c_2 (x_2 - y_p) + k_2 (\dot{x}_2 - \dot{y}_p) , \tag{16}$$

so daß

$$P = P_0 - m_2 \ddot{x}_2 - m_1 \ddot{y}_p \quad \text{oder} \quad P = P_0 - \Delta P \tag{15'}$$

ist.

Im zweiten Fall (elastisch bereiftes Rad) gilt

$$P = P_0 - c_1 (x_1 - y_p) - k_1 (\dot{x}_1 - \dot{y}_p) . \qquad (15'')$$

Hier gilt für die Radmasse

$$- m_1 \ddot{x}_1 = c_1 (x_1 - y_p) - c_2 (x_2 - x_1) + k_1 (\dot{x}_1 - \dot{y}_p) - k_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \qquad (16')$$

und für die Aufbaumasse

$$- m_2 \ddot{x}_2 = c_2 (x_2 - x_1) + k_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) . \qquad (16'')$$

Auf beide Fälle lassen sich unter Einführung der veränderlichen Bahnkraft P die Gleichungen (11) anwenden; dann ist in Trägermitte

$$y_0 = \frac{P}{c_{01}} - \frac{m_0}{c_{00}} \ddot{y}_0$$

$$= \frac{P_0 - \Delta P}{c_{01}} - \frac{m_0}{c_{00}} \ddot{y}_0 , \qquad (11'')$$

$$y_p = \frac{P}{c_{11}} - \frac{m_0}{c_{01}} \ddot{y}_0$$

$$= \frac{P_0 - \Delta P}{c_{11}} - \frac{m_0}{c_{01}} \ddot{y}_0 . \qquad (11''')$$

Diese gekoppelten Gleichungen lassen sich nach den zweiten Differentialquotienten auflösen ($\ddot{y}_0$, $\ddot{y}_p$, $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$); die schrittweise Integration ist jedoch mit verschiedenen Schwierigkeiten und einem so erheblichen Zeitaufwand verbunden, daß sie nicht mehr praktisch brauchbar erscheint. In vielen Fällen läßt sich aber das Verhalten des Trägers und des Fahrzeugs auf einfache Weise durch ein Eingabelungsverfahren eingrenzen, das auf folgenden Überlegungen beruht:

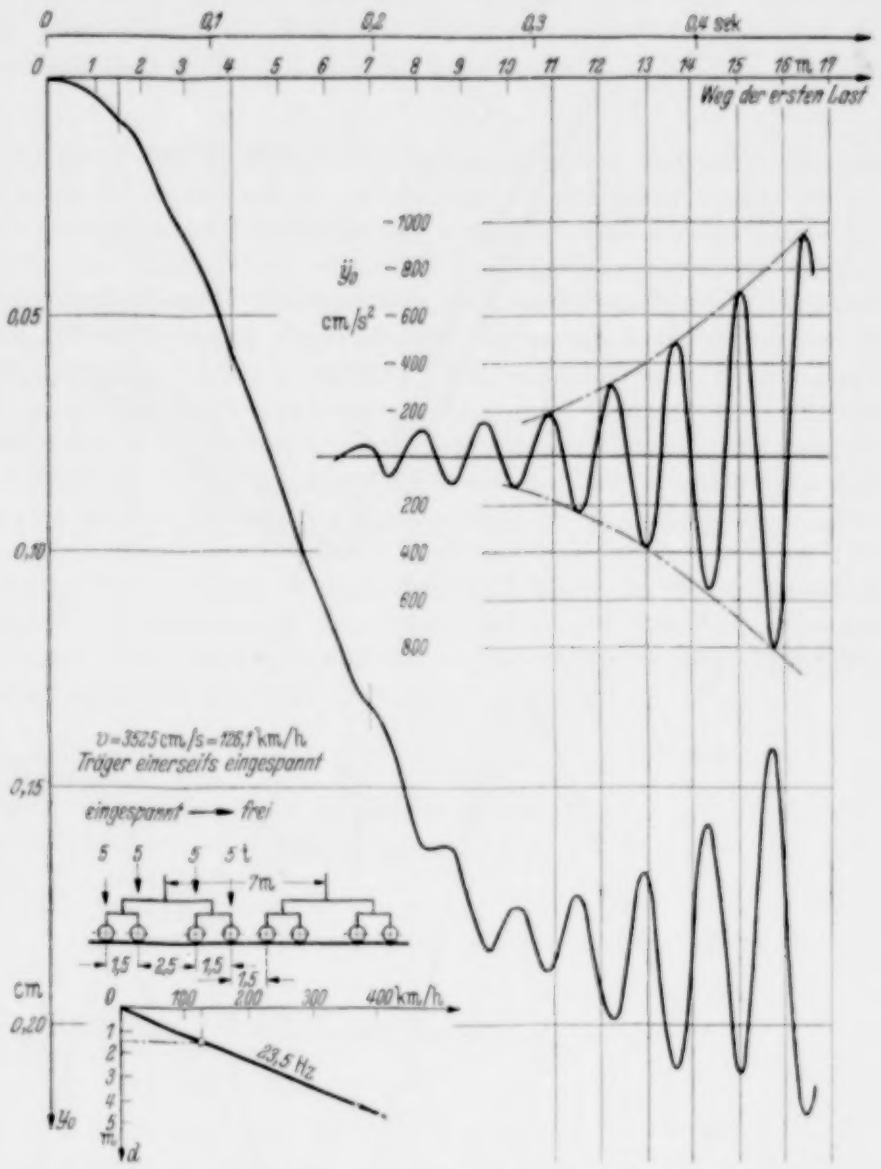

Abb. 9. Überfahrt einer Folge von Kräften über den einerseits eingespannten Träger, Schwingung der Trägermitte, $v = 126$ km/h. Zahlenbeispiel 2.

Wenn die Kraftschwankungen ΔP nur einen verhältnismäßig kleinen Prozentsatz der ursprünglich konstant gedachten Bahnkraft P_0 ausmachen, so kann sich unter ihrer Wirkung auch der Charakter der Lastwegkurve nur wenig ändern. Man wird also ein ziemlich zutreffendes Bild der Bahnkraftschwankungen erhalten, wenn man zunächst die Lastwegkurve $(y_p)_1$ mit der *Timoshenko*schen Annahme $P = P_0 = \text{const}$ bestimmt und diese sodann als **starre Rollkurve** für das gefederte und gedämpfte Fahrzeug-Ersatzsystem ansieht. Damit sind die Bahnkräfte $(P)_1$ bzw. deren Schwankungen $(\Delta P)_1$ nach (15) leicht zu bestimmen. Wenn die Schwingungszeit der Aufbaumasse m_2 groß gegenüber der Überfahrzeit und der Grundschwingungsdauer des Trägers ist, kann die senkrechte Aufbaubewegung x_2 vernachlässigt werden, es ergibt sich dann für das Stahlrad die weitere Vereinfachung

$$P \approx P_0 - c_1 y_p - k_1 y_p - m_1 \ddot{y}_p . \qquad (15''')$$

Die Werte y_p. $\dot{y}_p$, $\ddot{y}_p$ sind dabei entweder nach der Summengleichung (9'') und deren Ableitungen, oder bei schrittweiser Integration durch Differentiation von y_p zu ermitteln.

Das Verfahren der schrittweisen Integration läßt nun ohne weiteres eine neue Rechnung mit der so bestimmten veränderlichen wandernden Bahnkraft zu, woraus sich die zugehörige Lastwegkurve $(y_p)_2$ ergibt. Betrachtet man nunmehr $(y_p)_2$ als in der Verformung erstarrte Rollkurve für das Fahrzeug-Ersatzsystem, so ergibt eine weitere Rechnung die hiernach entstehende Bahnkraftschwankung $(\Delta P)_2$. Die Reihenfolge der Rechnungsgänge ist also

1. konstante bewegte Kraft P_0; Ergebnis Lastwegkurve $(y_p)_1$;
2. rollendes Fahrzeug-Ersatzsystem; starre Rollkurve $(y_p)_1$; Ergebnis Bahnkraft $(P)_1 = \text{var}$;
3. veränderliche Bahnkraft $(P)_1$; Ergebnis Lastwegkurve $(y_p)_2$;
4. rollendes Fahrzeug-Ersatzsystem; starre Rollkurve $(y_p)_2$; Ergebnis Bahnkraft $(P)_2 = \text{var}$.

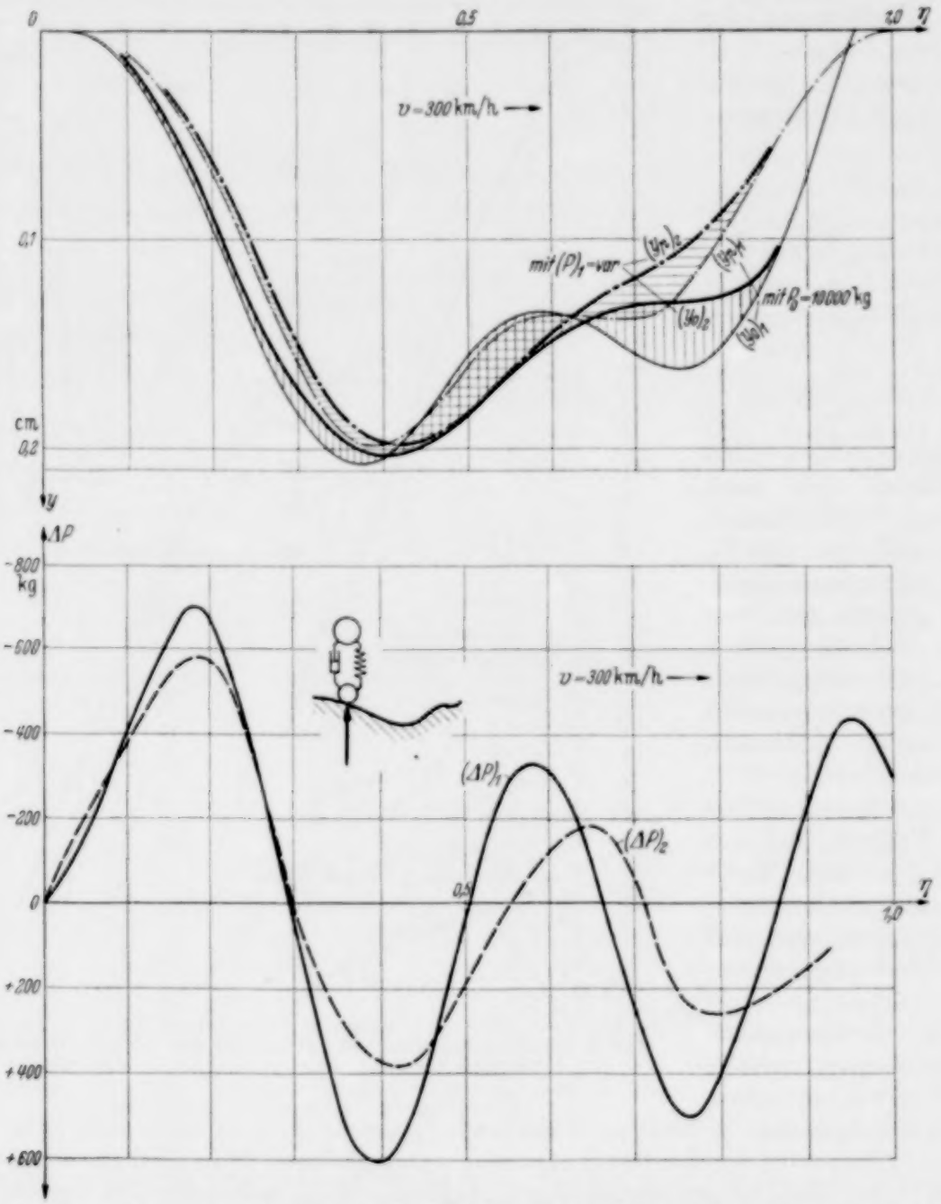

Abb. 10. Eingabelung von Lastweg und Bahnkraftschwankung für schwingungsfähiges Fahrzeug-Ersatzsystem mit starrem Rad. $v = 300$ km/h. Zahlenbeispiel 1 und 3.

Beide Rechnungen sind nicht ganz zutreffend, da der Rechnungsgang 2) und 4) mit einer ungenauen Rollkurve, der Rechnungsgang 3) mit einer ungenauen Bahnkraftfunktion durchgeführt ist. Jedoch lassen sich dadurch die Funktionen y_p und P eingrenzen und erforderlichenfalls durch mehrfache Wiederholung bis zur praktischen Deckung führen. In Abb. 10 ist auf diese Weise die Schwingung der Trägermitte und der vertikale Lastweg eingegabelt und die zugehörige Bahnkraftschwankung dargestellt. In diesem Beispiel beträgt die Schwankung $< 7\,\%$ der konstant gedachten Bahnkraft P_0. Bei der gewählten Rollgeschwindigkeit ergibt sich eine Verflachung der Lastwegkurve gegenüber der Rechnung mit P_0 nach *Timoshenko*,

da die Gegenschwingung des Trägers die nach unten gerichtete Massenwirkung der Laufrolle bereits kurz hinter der Trägermitte abfängt. Die nach dem *Zimmermann*schen Ansatz öfters gefundene Bahndrucksteigerung beim Anlaufen der zweiten Stütze tritt im vorliegenden Beispiel nicht auf. Dagegen überlagert sich den berechneten Werten eine Verminderung oder Vergrößerung der Federspannung infolge der vertikalen Aufbaubewegung, die in Gl. (15‴) mit $x_2 \approx 0$ unberücksichtigt geblieben ist.

In ähnlicher Weise läßt sich auch das Ersatzsystem mit elastisch bereiftem Rad behandeln; hier wird jedoch der Charakter der Bahnkraftschwankung erheblich verändert infolge der Eigenschwingung der Radmasse m_1. Durch diesen zusätzlichen Freiheitsgrad wird auch eine zusätzliche Resonanzmöglichkeit geschaffen. Es darf also bei Dauergeschwindigkeiten die Eigenfrequenz des Teilsystems Reifen–Rad nicht mit der Eigenfrequenz des Trägers übereinstimmen.

5. Zusammenfassung. Das Problem der Brückenschwingungen unter rollenden Lasten läßt in vielen Fällen Lösungen zu, die bei praktisch ausreichender Genauigkeit sowohl im gedanklichen Aufbau als auch in der numerischen Durchführung einfacher sind als die bisher bekannten. Der *Stokes-Zimmermann*sche Ansatz und — unter Beschränkung auf die Grundfrequenz des Trägers — auch der *Timoshenko*sche Ansatz lassen sich formal auf die Differentialgleichungen eines einfachen Feder–Masse-Systems zurückführen, wenn man die darin auftretenden Elastizitätswerte als zeitabhängige Variable auffaßt. Die entstehenden Gleichungen sind nach bekannten Methoden schrittweise integrierbar. Die große Anpassungsfähigkeit solcher Integrationsverfahren gestattet eine erhebliche Erweiterung der Betrachtung; sie erweisen sich besonders dann als fruchtbar, wenn analytisch schwer faßbare Funktionen auftreten. Verschiedene Anwendungen sind in Beispielen dargestellt; sie betreffen die Untersuchung einer Folge von wandernden Lasten, das Verhalten des einerseits eingespannten Trägers, und vor allem die Einbeziehung des — selbst als schwingungsfähiges System anzusehenden — Fahrzeugs in die rechnerische Untersuchung. Die bisher allein auf das Verhalten des Trägers gerichtete Betrachtungsweise wird dadurch auf die Gesamtaufgabe der Überfahrt schwingungsfähiger Fahrzeuge über eine schwingende Fahrbahn erweitert.

Bemerkung zu den Abbildungen:

Zur Berechnung der Zahlenbeispiele sind folgende Werte angenommen:

1. Träger beiderseits aufliegend, $l = 1000$ cm $q = 8{,}64$ kg/cm
   $EJ = 1{,}1865 \cdot 10^{12}$ cm²kg
   $P = 10000$ kg $m_{red} = 4{,}3397$ kgs²/cm
   Bild 2, 3, 4, 5, 6
   $P = 10000 - \Delta P \cdots$ Abb. 10.

2. Träger einerseits eingespannt, $l = 1100$ cm $q = 8{,}64$ kg/cm
   $P = 10000$ kg Abb. 7 $EJ = 1{,}1865 \cdot 10^{12}$ cm²kg
   $P = 5000$ kg Abb. 8, 9. $m_{red} = 4{,}4692$ kgs²/cm

3. Fahrzeug-Ersatzsystem, Abb. 10
   $m_1 = 1$; $m_2 = 9$ kgs²/cm; $c_2 = 360$ kg/cm; $k_2 = 36$ kgs/cm.

(Eingegangen am 24. Februar 1954.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *E. Marquard*, Düsseldorf, Kaiserswerther Str. 156.

Über den Kreisringträger mit begrenzter Verformung bei überkritischem Außendruck.

Von H. Link.

1. Einleitung und Voraussetzungen. Dem hier behandelten Problem liegt ein dünner Kreisringträger mit konstanter Querschnittsfläche F und unveränderlicher Biegungssteifigkeit EJ zugrunde, der im unbelasteten Zustand den auf den Schwerpunkt der Querschnittsfläche bezogenen Halbmesser r_0 hat. Der Ring ist in seiner Ebene ringsum durch einen gleichförmigen, äußeren Druck p belastet, dessen Wirkungslinien auch nach erfolgter Verformung des Ringes noch senkrecht zu den zugeordneten Ringelementen sein sollen (Flüssigkeitsdruck).

Der Ring ist umgeben von einem als starr anzusehenden dickwandigen Ring, dessen innerer Halbmesser dem äußeren Halbmesser des unbelasteten Kreisringträgers gleich ist, so daß bei fehlender Belastung der Kreisringträger ohne Spiel in den umgebenden Außenring hineinpaßt. Die Umfassung des Innenringes kann auch eine beliebige andere äußere Form haben, nur soll sie ausreichend starr und so kreiszylindrisch ausgenommen sein, daß sie den Innenring ohne Spiel aufzunehmen vermag.

Als Folge des Druckes p verkürzt sich der Umfang des Innenringes, so daß dieser nicht mehr über seine ganze Länge an dem umschließenden Außenring anliegen kann. Solange $p < p_k$ ist und die Ringmittelpunkte zusammenfallen, findet keine Berührung zwischen Innen- und Außenring statt. Zwischen beiden Ringen entsteht ein Spalt. Unter p_k ist dabei der kleinste kritische Druck zu verstehen, bei dem neben der kreisförmigen Gleichgewichtsfigur des Innenringes noch eine von der Kreisform abweichende Gleichgewichtsfigur existiert[1].

Wird $p \geq p_k$, so knickt der Innenring aus, wobei er am Außenring zur Anlage kommt. An den Anlagestellen werden vom Außenring auf den Innenring Stützkräfte übertragen. Die Zahl, Art und Anordnung der Anlagestellen, sowie Größe und Beschaffenheit der dort auf den Innenring ausgeübten Stützkräfte hängen von der Größe des Druckes p und den Abmessungen des Innenringes ab.

Die äußere Verformungsbegrenzung bewirkt mittelbar auch eine Begrenzung der nach innen hin gerichteten Verformungen des Innenringes, so daß in dem praktisch wichtigen Bereich sehr kleiner Verformungen, auf den diese Untersuchung beschränkt ist, ein stabiles Verhalten des Innenringes erreicht wird. Im allgemeinen bestimmt daher die Werkstoffestigkeit die Tragfähigkeit des Ringes. Hier soll vorausgesetzt werden, daß der Innenring aus einem *Hooke*schen Material besteht, das alle im Verlauf der Untersuchung vorkommenden Beanspruchungen vertragen kann.

Das Problem ist mehrdeutig, weil zum gleichen äußeren Druck p mehrere verschiedene Formen des Innenringes gehören können. Außerdem weist das Problem Durchschlagerscheinungen auf. Der durch gleichförmigen Außendruck belastete Kreisringträger mit nach außen hin begrenzter Verformung zeigt daher in seinem Verhalten Ähnlichkeit mit einem geraden, durchbiegungsbegrenzten Knickstab[2].

Die Untersuchung beschränkt sich auf die Ermittlung der möglichen Ringformen im Bereich sehr kleiner Verformungen und die dabei vom Außen- auf den Innenring übertragenen Stützkräfte in Abhängigkeit vom Außendruck p mit dem Ziel, die Bestimmung der Schnittkräfte und Spannungen im Innenring zu ermöglichen. Hierbei sind Reibungskräfte, wo solche etwa auftreten können, vernachlässigt.

2. Die praktische Bedeutung des Problems[3]. Die Auskleidung von Bergwerksschächten in wasserführenden Deckgebirgsschichten besteht meistens aus einer dünnwandigen Eisenröhre von kreiszylindrischem Querschnitt, die von einem starken, ebenfalls kreiszylindrischen Betonmantel umgeben ist. In größeren Tiefen werden zuweilen zwei ineinanderstehende Eisenröhren verwendet, deren Zwischenraum mit Beton ausgefüllt wird. Der Anschluß einer solchen doppelwandigen Röhre an das Gebirge wird auch durch einen Betonmantel hergestellt.

---

[1] *E. Chwalla* u. *C. F. Kollbrunner*, Stahlbau 1938, S. 73/78.
[2] *H. Link*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 237.
[3] *H. Link*, Glückauf 90 (1954), S. 581.

Abb. 1a und 1b zeigen einen senkrechten Schnitt durch einen in der Höhe begrenzten Teil solcher Schachtauskleidungen. Die Eisenröhren bestehen im allgemeinen aus einzelnen Ringen und diese wiederum aus einer größeren Zahl von Segmenten. Die Segmente sind entweder miteinander verschraubt oder manchmal auch verschweißt.

Der ringsum auf die Röhre wirkende gleichförmige Wasserdruck stellt den wesentlichsten Teil der Belastung derartiger Schachtauskleidungen dar. Seine Größe wächst proportional mit der Tiefe. Seine Angriffsfläche wird bestimmt durch das Durchlässigkeitsverhältnis des Betonmantels zum Eisenmantel. Im Grenzfall muß angenommen werden, daß der volle hydrostatische Druck an der Eisenröhre angreift[1], weil die Durchlässigkeit des Betonmantels fast immer sehr viel größer als die der Eisenröhre ist. Letztere hat neben ihrer rein statischen Aufgabe vor allem für die Dichtigkeit der Schachtauskleidung zu sorgen.

Im allgemeinen wird auf die Herstellung einer ausreichenden Verbindung zwischen Eisen und Beton durch konstruktive Maßnahmen im Schachtausbau verzichtet. Daher kann sich bei Einwirkung des Wasserdruckes auf die Eisenröhre diese unter Umständen durch Überschreitung des natürlichen Haftvermögens zwischen Eisen und Beton von dem umgebenden Betonmantel lösen und einbeulen, weil sie hiergegen fast nie eine ausreichende Sicherheit hat. Die damit verbundenen Verformungen der Eisenröhre werden jedoch durch den umgebenden Betonmantel begrenzt, der wegen seiner großen Wandstärke hinreichend genau als starr

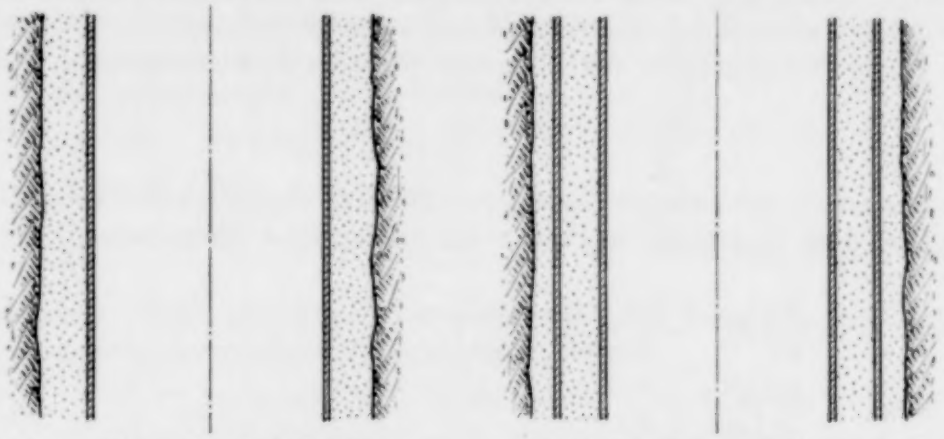

Abb. 1a. Einwandiger Schachtausbau.

Abb. 1b. Doppelwandiger Schachtausbau.

Abb. 2. Verformung eines Elementes des Innenringes.

aufgefaßt werden kann. Für den Wasserdruck gilt die getroffene Voraussetzung, daß seine Wirkungslinien stets senkrecht zur äußeren Mantelfläche der Eisenröhre sind. Das bei Schachtauskleidungen vorliegende Problem stimmt daher in allen grundsätzlichen Punkten mit dem hier behandelten überein. Wegen der großen Länge solcher Schachtröhren ist lediglich dabei der Elastizitätsmodul E durch $E^* = E/(1-\mu^2)$ zu ersetzen.

Das Problem hat außerdem praktische Bedeutung für entleerte Druckstollen oder Druckschächte von Wasserkraftanlagen, wenn diese mit einem dünnwandigen Stahlrohr gepanzert sind und der Raum zwischen Stahlrohr und Felsausbruch mit Beton ausgefüllt ist [2]. Hierbei wirkt von außen her ebenfalls der Gebirgswasserdruck auf den Stahlmantel und versucht ihn einzubeulen [3].

3. Die Grundlagen für die Lösung des Problems. In Abb. 2 ist ein Element des Innenringes dargestellt. Es bedeuten darin:

$\widehat{A_0B_0}$ mit Krümmungsradius r_0 das Element im unbelasteten Zustand des Ringes,

$\widehat{A_1B_1}$ mit Krümmungsradius r_1 das Element des belasteten, aber kreisförmig gebliebenen Ringes (erste Gleichgewichtsform),

$\widehat{A_2B_2}$ mit Krümmungsradius r_2 das Element des belasteten, von der Kreisform abgewichenen Ringes (zweite Gleichgewichtsform).

---

[1] *F. Mohr*, Bergbau-Archiv 2 (1946), S. 7.

[2] *E. Amstutz*, Schweiz. Bauz. 68 (1950), S. 102. — *H. Juillard*, Schweiz. Bauz. 70 (1952), S. 451, 468, 487. — *E. Amstutz*, Schweiz. Bauz. 71 (1953), S. 229. — *H. Juillard*, Schweiz. Bauz. 71 (1953), S. 382.

[3] *E. Chwalla*, Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau-Verbandes. Heft 3 (1954).

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsform erfährt das Ringelement eine tangentiale Verschiebung v und eine radiale Verschiebung w. Es wird festgesetzt, daß $v>0$ sein soll, wenn die tangentiale Verschiebung im Sinne eines wachsenden Winkels φ erfolgt. w soll positiv sein, wenn die radiale Verschiebung zum Krümmungsmittelpunkt hin gerichtet ist.

Wie aus Abb. 2 durch eine einfache geometrische Betrachtung entnommen werden kann, ergeben sich die Dehnung, Querschnittsdrehung und die Krümmungsänderung beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsform unter Vernachlässigung der Glieder 2. und höherer Ordnung, ausgedrückt durch die Verschiebungen v und w und deren Ableitungen, zu:

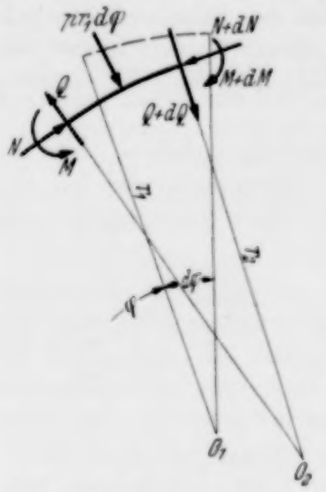

Abb. 3. Kräfte am Ringelement bei der zweiten Gleichgewichtsform des Ringes.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{r_1}\left(w - \frac{dv}{d\varphi}\right), \\ \psi &= \frac{1}{r_1}\left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right), \\ \varkappa &= \frac{1}{r_1^2}\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2w}{d\varphi^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Es ist $\varepsilon>0$ bei Stauchung des Elementes, $\psi>0$, wenn die Querschnittsdrehung mit wachsendem Winkel φ im Uhrzeigersinne erfolgt, und $\varkappa>0$, wenn beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsform die Krümmung vergrößert wird.

Die Schnittkräfte für die erste Gleichgewichtsform sind

$$N_1 = p r_1, \qquad Q_1 = 0, \qquad M_1 = p\frac{J}{F}, \tag{2}$$

Die beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsform zusätzlich auftretenden Schnittkräfte ergeben sich aus dem Kräftegleichgewicht am verformten Ringelement nach Abb. 3 zu

$$\left.\begin{aligned} N_2 &= -\frac{p r_1^2}{EJ} M_2 - \frac{EJ}{r_1^3}\left(\frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{d^4w}{d\varphi^4}\right), \\ Q_2 &= -\frac{EJ}{r_1^3}\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + \frac{d^3w}{d\varphi^3}\right), \\ M_2 &= \frac{EJ}{r_1^2}\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2w}{d\varphi^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierin sind die Verformungseinflüsse auf die Schnittkräfte ausreichend berücksichtigt.

Die Gesamtschnittkräfte im Ring für die zweite Gleichgewichtsform ergeben sich als Summe der Schnittkräfte nach den Gleichungen (2) und (3), also

$$\left.\begin{aligned} N &= N_1 + N_2, \\ Q &= Q_1 + Q_2, \\ M &= M_1 + M_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Das Momentengleichgewicht aller am Ringelement bei der zweiten Gleichgewichtsform des Ringes angreifenden Kräfte liefert mit O_2 als Drehpunkt

$$\frac{EJ}{r_1^2}\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + \frac{d^3w}{d\varphi^3}\right) + r_2\left[p\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + \frac{d^3w}{d\varphi^3}\right) + \frac{EJ}{r_1^3}\left(\frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^5w}{d\varphi^5}\right)\right] = 0.$$

Wird hierin wegen $r_2 \approx r_1$ der Radius r_2 durch r_1 ersetzt und ferner in Anlehnung an die Auffassung von *Chwalla*[1] $\varepsilon = 0$, also nach (1)

$$w = \frac{dv}{d\varphi} \tag{5}$$

gesetzt, so erhält man daraus mit der Abkürzung

$$k^2 = 1 + \frac{p r_1^3}{EJ} \tag{6}$$

[1] *E. Chwalla* u. *C. F. Kollbrunner*, Fußnote 1 von S. 36.

die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^6v}{d\varphi^6} + (k^2+1)\frac{d^4v}{d\varphi^4} + k^2\frac{d^2v}{d\varphi^2} = 0\,. \tag{7}$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$v = A_1\cos k\varphi + A_2\sin k\varphi + A_3\cos\varphi + A_4\sin\varphi + A_5\,\varphi + A_6 \tag{8}$$

und wurde erstmals von *Federhofer*[1] angegeben.

4. Die möglichen Ringformen in Abhängigkeit vom äußeren Druck p. a) Die Grundformen des Ringes. Als erste wird die am nächsten liegende Ringform untersucht, bei der der Innenring an a in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten am Außenring anliegt. Alle zum Innenring gehörigen Bögen befinden sich dabei bezüglich ihrer Belastung und Verformung in der gleichen Lage, so daß sämtliche Anlagestellen des Innenringes gegenüber der ersten Gleichgewichtsform die gleiche tangentiale und radiale Verschiebung erfahren haben müssen. Es kommt jedoch nur auf die radiale Verschiebung an, da die tangentiale Verschiebung stets durch eine entsprechende Drehung des ganzen Ringes um seinen Mittelpunkt zum Verschwinden gebracht werden kann. Die Untersuchung darf sich auf einen Bogen beschränken.

In Abb. 4 ist ein Bogen eines Innenringes der vorausgesetzten Form mit dem Öffnungswinkel $2\varphi_0$ zwischen zwei benachbarten Anlagestellen dargestellt. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen gelten für die Anlagestellen die Bedingungen

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm\varphi_0\,,\\ w &= w_0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm\varphi_0\,,\\ \frac{dw}{d\varphi} &= 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm\varphi_0\,. \end{aligned}$$

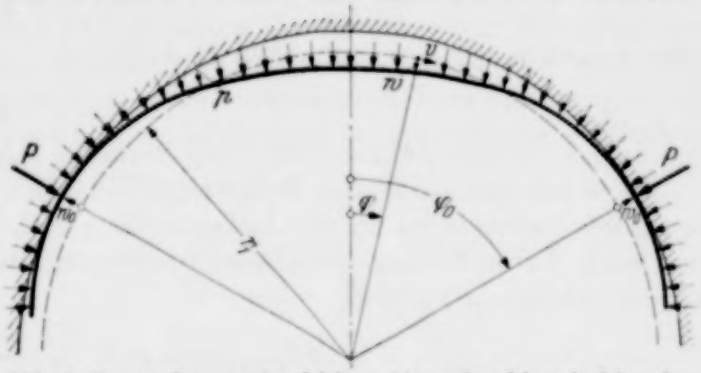

Abb. 4. Bogen des an a in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten anliegenden Ringes.

Hiermit ergibt sich aus (8) das folgende, für die eindeutige Bestimmung der Integrationskonstanten ausreichende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1\cos k\varphi_0 + A_2\sin k\varphi_0 + A_3\cos\varphi_0 + A_4\sin\varphi_0 + A_5\varphi_0 + A_6\,,\\ 0 &= A_1\cos k\varphi_0 - A_2\sin k\varphi_0 + A_3\cos\varphi_0 - A_4\sin\varphi_0 - A_5\varphi_0 + A_6\,,\\ w_0 &= -A_1 k\sin k\varphi_0 + A_2 k\cos k\varphi_0 - A_3\sin\varphi_0 + A_4\cos\varphi_0 + A_5\,,\\ w_0 &= A_1 k\sin k\varphi_0 + A_2 k\cos k\varphi_0 + A_3\sin\varphi_0 + A_4\cos\varphi_0 + A_5\,,\\ 0 &= -A_1 k^2\cos k\varphi_0 - A_2 k^2\sin k\varphi_0 - A_3\cos\varphi_0 - A_4\sin\varphi_0\,,\\ 0 &= -A_1 k^2\cos k\varphi_0 + A_2 k^2\sin k\varphi_0 - A_3\cos\varphi_0 + A_4\sin\varphi_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Durch Addition und Subtraktion der jeweils zu der gleichen Grenzbedingung gehörenden zwei Gleichungen ergeben sich aus (9) die zwei Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1\cos k\varphi_0 + A_3\cos\varphi_0 + A_6\,,\\ 0 &= A_1 k\sin k\varphi_0 + A_3\sin\varphi_0\,,\\ 0 &= A_1 k^2\cos k\varphi_0 + A_3\cos\varphi_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_2\sin k\varphi_0 + A_4\sin\varphi_0 + A_5\varphi_0\,,\\ w_0 &= A_2 k\cos k\varphi_0 + A_4\cos\varphi_0 + A_5\,,\\ 0 &= A_2 k^2\sin k\varphi_0 + A_4\sin\varphi_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{10b}$$

Das System (10a) wird entweder befriedigt durch die triviale Lösung

$$A_1 = A_3 = A_6 = 0 \tag{11}$$

oder durch die sich aus dem Verschwinden der Koeffizientendeterminante ergebende Bedingung

$$\sin k\varphi_0\cos\varphi_0 - k\cos k\varphi_0\sin\varphi_0 = 0\,. \tag{12}$$

Für die weiteren Betrachtungen wird zunächst (11) zugrunde gelegt. Die übrigen Konstanten ergeben sich dann aus (10b) zu

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \frac{w_0\varphi_0\sin\varphi_0}{(k^2-1)\sin\varphi_0\sin k\varphi_0 + k\varphi_0(\sin\varphi_0\cos k\varphi_0 - k\cos\varphi_0\sin k\varphi_0)}\,,\\ A_4 &= \frac{-w_0 k^2\varphi_0\sin k\varphi_0}{(k^2-1)\sin\varphi_0\sin k\varphi_0 + k\varphi_0(\sin\varphi_0\cos k\varphi_0 - k\cos\varphi_0\sin k\varphi_0)}\,,\\ A_5 &= \frac{w_0(k^2-1)\sin k\varphi_0\sin\varphi_0}{(k^2-1)\sin\varphi_0\sin k\varphi_0 + k\varphi_0(\sin\varphi_0\cos k\varphi_0 - k\cos\varphi_0\sin k\varphi_0)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

[1] *K. Federhofer*, Eisenbau 12 (1921), S. 291.

Wegen (11) und (8) ist v eine ungerade Funktion und daher w wegen (5) eine gerade Funktion, d.h. der Bogen ist zu $\varphi = 0$ symmetrisch verformt. Für $\varphi = 0$ verschwinden daher $\frac{d^2v}{d\varphi^2}$ und $\frac{d^4v}{d\varphi^4} = \frac{d^3w}{d\varphi^3}$, also gemäß (4), (3) und (2) auch die Querkraft in der Mitte des Bogens.

Bestimmten Öffnungswinkeln $2\varphi_0$ des Bogens sind Belastungsbereiche $k^u \leq k \leq k^o$ zugeordnet, in denen die betreffende Ringform existieren kann. Die untere Grenze k^u dieser Belastungsbereiche ergibt sich aus der Bedingung, daß sich der Innenring drucklos an den Außenring anlegt. An der unteren Grenze der Belastungsbereiche muß also die Stützkraft $P = 0$ sein. Das ist der Fall, wenn die Querkraft an der Anlagestelle des Bogens verschwindet. Aus

$$Q_{\varphi=\varphi_0} = -\frac{EJ}{r_1^3}\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + \frac{d^3w}{d\varphi^3}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

folgt mit (8) unter Berücksichtigung von (11) $\sin k\varphi_0 = 0$ oder $k\varphi_0 = n\pi$ $(n = 1, 2 \ldots)$. Der kleinste Wert k^u ergibt sich hieraus mit $n = 1$ zu

$$k^u = \frac{\pi}{\varphi_0}, \tag{14}$$

oder wegen $a\varphi_0 = \pi$ (vgl. Abb. 4) auch zu

$$k^u = a. \tag{15}$$

Die untere Grenze k^u der Belastungsbereiche stimmt mit der Zahl der Anlagestellen überein.

Die obere Grenze k^o der Belastungsbereiche ergibt sich aus der Bedingung, daß die Krümmung des Innenringes an der Anlagestelle gleich der Ringkrümmung im unbelasteten Zustand sein muß. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden des Biegungsmomentes an der Anlagestelle. Aus

$$M_{\varphi=\varphi_0} = \frac{J}{F}P + \frac{EJ}{r_1^2}\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2w}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

ergibt sich mit (8), (11), $w_0 = -\frac{p\,r_1^2}{EF}$ und den Konstanten A_2, A_5 nach (13)

$$\sin k\varphi_0 \cos\varphi_0 - k\cos k\varphi_0 \sin\varphi_0 = 0. \tag{16}$$

Diese Bedingung stimmt mit (12) überein und geht mit $a\varphi_0 = \pi$ über in

$$\sin\left(k\frac{\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}\right) - k\cos\left(k\frac{\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0. \tag{17}$$

Durch (17) wird jedem Wert a ($a \geq 2$, ganzzahlig) in eindeutiger Weise ein kleinster Wert k^o zugeordnet. In der nebenstehenden Tabelle sind die unteren und oberen Belastungsgrenzwerte k^u und k^o in Abhängigkeit von der Zahl der Anlagestellen a angegeben.

a	2	3	4	5	6	7	8
k^u	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00
k^o	3,00	4,37	5,78	7,20	8,62	10,05	11,47

Wie die Tabelle zeigt, überschneiden sich mit Ausnahme von $a = 2$ die Belastungsbereiche, so daß zu einer bestimmten Belastung des Ringes verschiedene Ringformen gehören können. Zur Ermittlung der Schnittkräfte und Spannungen im Ring gehört daher die Angabe der zugrunde gelegten Ringform.

Die mit (16) zur Auffindung der oberen Belastungsgrenzwerte k^o für die verschiedenen Ringformen übereinstimmende Bedingung (12) vermag das Gleichungssystem (10a) zu befriedigen, ohne daß die Konstanten A_1, A_3 und A_6 verschwinden. Sie stellt somit eine Stabilitätsbedingung dar, mit deren Hilfe die relativen Größen von A_1, A_3 und A_6 nach (10a) berechnet werden können. Damit sind aber auch die auf diese Konstanten zurückgehenden Anteile der Verschiebungen v und w bis auf einen gemeinsamen, an der Stabilitätsgrenze sehr klein zu denkenden Parameter festgelegt.

Die radialen Verschiebungen w des Bogens zwischen zwei Anlagestellen setzen sich dann zusammen aus einem zu $\varphi = 0$ symmetrischen Anteil (A_2, A_4, A_5) und einem zu $\varphi = 0$ antisymmetrischen Anteil (A_1, A_3, A_6). Bei freier Verformungsmöglichkeit würde der Bogen anti-

symmetrisch ausknicken, wenn k und φ_0 der Bedingung (12) bzw. (16) genügen. Die von dem symmetrischen Verformungsanteil herrührenden Biegungsmomente an den Bogenenden verschwinden. Die Gesamtbiegungsmomente an den Bogenenden ergeben sich daher nur aus dem antisymmetrischen Verformungsanteil und betragen nach (3) mit Verwendung von (8) und (12)

$$M_{\varphi=\pm\varphi_0} = \pm\frac{EJ}{r_1^2} A_1 k (k^2-1) \sin k\varphi_0 .$$

Sie haben damit für die beiden Bogenenden entgegengesetzt gleiche Größe.

Bei dem hier behandelten Problem kann aber an den Anlagestellen kein negatives Biegungsmoment im Innenring auftreten, weil dazu die Ringkrümmung an der Anlagestelle kleiner als im unbelasteten Zustand werden müßte. Dies aber wird durch den Außenring verhindert. Mithin muß im vorliegenden Fall auch dann $A_1 = A_3 = A_6 = 0$ sein, wenn die Bedingung (12) bzw. (16) erfüllt ist. Der Außenring läßt kein antisymmetrisches Ausknicken des Bogens bei erreichter oberer Belastungsgrenze k^o zu.

Mit den behandelten Ringformen ist bereits eine wesentliche Gruppe der möglichen Gleichgewichtsformen erledigt. Es muß hierzu noch ergänzt werden, daß mit wachsender Zahl a der Anlagestellen die Genauigkeit der abgeleiteten Formeln geringer wird, weil alle einleitend gemachten vereinfachenden Voraussetzungen mit wachsender Belastung p zunehmend schlechter zutreffen.

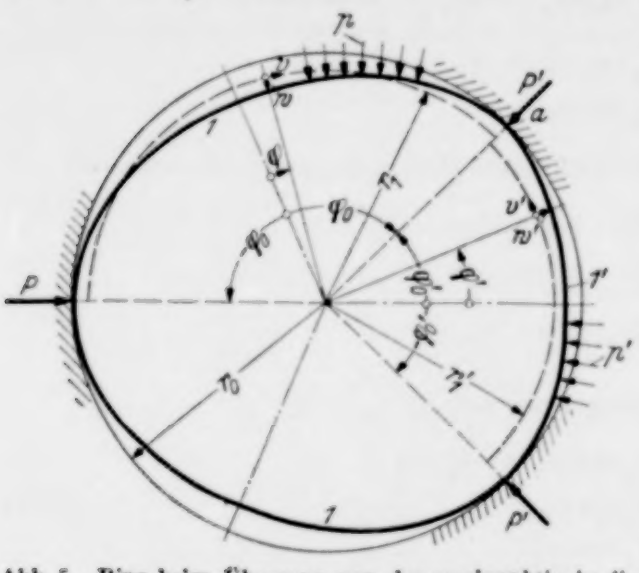

Abb. 5. Ring beim Übergang von der zweipunktig in die dreipunktig gestützte Grundform.

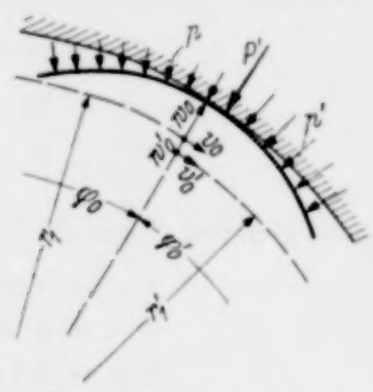

Abb. 6. Die Übergangsstelle a des Ringes nach Abb. 5 in größerem Maßstab.

b) Die Übergangsformen des Ringes. Eine zweite Gruppe von Gleichgewichtsformen ergibt sich beim Übergang des an a in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten gestützten Ringes in eine gleichartige Ringform mit einer größeren Zahl von Anlagestellen. Die einfachste Gleichgewichtsform dieser Art entsteht nach Überschreitung der oberen Belastungsgrenze des an zwei sich gegenüberliegenden Punkten gestützten Ringes. Dieser Fall wird anschließend behandelt.

In Abb. 5 ist ein Ring mit den daran angreifenden Kräften, beim Übergang von der zweipunktig in die dreipunktig gestützte Grundform, dargestellt. Dabei ist unterstellt, daß der Ausgangszustand dieser Ringform durch das Zusammenfallen der Stützkräfte P', also durch $\varphi_0' = 0$, gekennzeichnet ist. Da der Bogen zwischen den Kräften P' auch am Außenring anliegen kann, ist für diesen Teil des Ringes als äußerer Druck p' angenommen worden.

Der Ring setzt sich zusammen aus zwei Bögen 1 vom Öffnungswinkel $2\varphi_0$ und einem Bogen 1′ vom Öffnungswinkel $2\varphi_0'$. Für diese Bögen ergeben sich entsprechend der angenommenen verschiedenen Drücke p und p' auch unterschiedliche Radien r_1 und r_1' für die erste Gleichgewichtsform. Die Übergangsstelle a vom Bogen 1 in den Bogen 1′ ist in Abb. 6 mit den dort auftretenden Verschiebungen der Bogenenden dargestellt. Danach muß $r_0' = -r_0$ sein.

Für den Bogen 1 erhält man mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} v &= r_0 && \text{für} && \varphi = \varphi_0 , \\ v &= 0 && \text{für} && \varphi = -\varphi_0 , \\ w &= w_0 && \text{für} && \varphi = \pm\varphi_0 , \\ \frac{dw}{d\varphi} &= 0 && \text{für} && \varphi = \pm\varphi_0 \end{aligned}$$

aus (8) das Gleichungsystem

$$\begin{aligned}
v_0 &= A_1 \cos k\varphi_0 + A_2 \sin k\varphi_0 + A_3 \cos \varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 + A_5\varphi_0 + A_6,\\
0 &= A_1 \cos k\varphi_0 - A_2 \sin k\varphi_0 + A_3 \cos \varphi_0 - A_4 \sin \varphi_0 - A_5\varphi_0 + A_6,\\
w_0 &= -A_1 k \sin k\varphi_0 + A_2 k \cos k\varphi_0 - A_3 \sin \varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0 + A_5,\\
w_0 &= A_1 k \sin k\varphi_0 + A_2 k \cos k\varphi_0 + A_3 \sin \varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0 + A_5,\\
0 &= -A_1 k^2 \cos k\varphi_0 - A_2 k^2 \sin k\varphi_0 - A_3 \cos \varphi_0 - A_4 \sin \varphi_0,\\
0 &= -A_1 k^2 \cos k\varphi_0 + A_2 k^2 \sin k\varphi_0 - A_3 \cos \varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0.
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nach Addition und Subtraktion von jeweils zwei zur gleichen Grenzbedingung gehörenden Gleichungen die beiden Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v_0}{2} &= A_1 \cos k\varphi_0 + A_3 \cos \varphi_0 + A_6,\\
0 &= A_1 k \sin k\varphi_0 + A_3 \sin \varphi_0,\\
0 &= A_1 k^2 \cos k\varphi_0 + A_3 \cos \varphi_0,
\end{aligned}\right\} \tag{18a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v_0}{2} &= A_2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 + A_5\varphi_0,\\
w_0 &= A_2 k \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0 + A_5,\\
0 &= A_2 k^2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0.
\end{aligned}\right\} \tag{18b}$$

Für den Bogen 1′ erhält man mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned}
v' &= \pm v'_0 = \mp v_0 \quad \text{für} \quad \varphi' = \pm\varphi'_0,\\
w' &= w'_0 \qquad\qquad \text{für} \quad \varphi' = \pm\varphi'_0,\\
\frac{dw'}{d\varphi'} &= 0 \qquad\qquad \text{für} \quad \varphi' = \pm\varphi'_0
\end{aligned}$$

aus (8) auf dem gleichen Wege die beiden Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned}
0 &= A'_1 \cos k'\varphi'_0 + A'_3 \cos \varphi'_0 + A'_6,\\
0 &= A'_1 k' \sin k'\varphi'_0 + A'_3 \sin \varphi'_0,\\
0 &= A'_1 k'^2 \cos k'\varphi'_0 + A'_3 \cos \varphi'_0,
\end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

$$\left.\begin{aligned}
-v_0 &= A'_2 \sin k'\varphi'_0 + A'_4 \sin \varphi'_0 + A'_5\varphi'_0,\\
w'_0 &= A'_2 k' \cos k'\varphi'_0 + A'_4 \cos \varphi'_0 + A'_5\\
0 &= A'_2 k'^2 \sin k'\varphi'_0 + A'_4 \sin \varphi'_0.
\end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

Aus den gleichen Gründen wie beim Ring mit in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Anlagestellen muß immer

$$\left.\begin{aligned}
&\text{nach (18a)} && A_1 = A_3 = 0; \qquad A_6 = \frac{v_0}{2},\\
&\text{„ (19a)} && A'_1 = A'_3 = A'_6 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

sein, selbst dann, wenn die die Gleichungssysteme (18a) und (19a) ebenfalls befriedigenden Stabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned}
\sin k\varphi_0 \cos \varphi_0 - k \cos k\varphi_0 \sin \varphi_0 &= 0,\\
\sin k'\varphi'_0 \cos \varphi'_0 - k' \cos k'\varphi'_0 \sin \varphi'_0 &= 0
\end{aligned}$$

erfüllt sind. Damit ergibt sich aus (18b) und (19b) das folgende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v_0}{2} &= A_2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 + A_5\varphi_0,\\
w_0 &= A_2 k \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0 + A_5,\\
0 &= A_2 k^2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0,\\
-v_0 &= A'_2 \sin k'\varphi'_0 + A'_4 \sin \varphi'_0 + A'_5\varphi'_0,\\
w'_0 &= A'_2 k' \cos k'\varphi'_0 + A'_4 \cos \varphi'_0 + A'_5,\\
0 &= A'_2 k'^2 \sin k'\varphi'_0 + A'_4 \sin \varphi'_0.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

An der Übergangsstelle a der beiden Bögen 1 und 1′ müssen ferner noch die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} M_{\varphi=\varphi_0} &= M'_{\varphi'=\varphi'_0}, \\ N_{\varphi=\varphi_0} &= N'_{\varphi'=\varphi'_0}, \\ P' &= Q_{\varphi=\varphi_0} + Q'_{\varphi'=\varphi'_0}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich mit (2) und (3) unter Berücksichtigung von (20) in derselben Reihenfolge die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_1^2}(A_2 k^3 \cos k\varphi_0 + A_4 \cos\varphi_0) = \frac{1}{r_1'^2}(A'_2 k'^3 \cos k'\varphi'_0 + A'_4 \cos\varphi'_0), \\ &p(r_0 + A_4 \cos\varphi_0) = p'(r_0 + A'_4 \cos\varphi'_0), \\ &P' = p A_4 \sin\varphi_0 + p' A'_4 \sin\varphi'_0. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die in Abb. 5 dargestellte Gleichgewichtsform des Ringes kann dann mit den kleinsten äußeren Drücken p und p' aufrechterhalten werden, wenn die Querkräfte an den Enden des Bogens 1′ $Q'_{\varphi'=\varphi'_0} = Q'_{\varphi'=-\varphi'_0} = 0$ sind. Hieraus ergibt sich wegen $Q'_{\varphi'=\varphi'_0} = p' A'_4 \sin\varphi'_0$ und $p' \neq 0$ für die Konstante $A'_4 = 0$. Die letzte Gleichung des Systems (21) kann damit durch eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt werden:

$$A'_2 = A'_4 = 0, \quad (23)$$

$$A'_4 = 0; \quad \sin k'\varphi'_0 = 0. \quad (24)$$

Mit der Bedingung (23) wird aus den Gleichungssystemen (21) und (22)

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_0}{2} &= A_2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin\varphi_0 + A_5\varphi_0, \\ w_0 &= A_2 k \cos k\varphi_0 + A_4 \cos\varphi_0 + A_5, \\ 0 &= A_2 k^2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin\varphi_0, \\ -v_0 &= A'_5\varphi'_0, \\ w'_0 &= A'_5, \\ 0 &= A_2 k^3 \cos k\varphi_0 + A_4 \cos\varphi_0, \\ p'/p &= 1 + \frac{A_4}{r_0}\cos\varphi_0, \\ P' &= p A_4 \sin\varphi_0. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Die dritte und sechste Gleichung dieses Systems können nur dann eine von $A_2 = A_4 = 0$ (erste Gleichgewichtsform) verschiedene Lösung haben, wenn die sich aus dem Verschwinden der Koeffizientendeterminante ergebende Bedingung

$$\sin k\varphi_0 \cos\varphi_0 - k \cos k\varphi_0 \sin\varphi_0 = 0 \quad (26)$$

erfüllt wird. Hieraus ergeben sich die in der Tabelle angegebenen Belastungswerte k in Abhängigkeit vom Winkel φ_0

$\varphi_0^{[\circ]}$	k	$\varphi_0^{[\circ]}$	k	$\varphi_0^{[\circ]}$	k	$\varphi_0^{[\circ]}$	k
90	3,000	65	4,053	40	6,490	15	17,180
85	3,156	60	4,375	35	7,402	10	25,750
80	3,337	55	4,756	30	8,621	5	51,500
75	3,542	50	5,217	25	10,340	0	∞
70	3,779	45	5,782	20	12,900		

Mit Benutzung von (26) ergeben sich aus (25) die Konstanten zu

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \frac{\left(w_0\varphi_0 - \frac{v_0}{2}\right)\sin\varphi_0}{(k^2-1)\sin k\varphi_0(\sin\varphi_0 - \varphi_0\cos\varphi_0)}, \\ A_4 &= -\frac{\left(w_0\varphi_0 - \frac{v_0}{2}\right)k^2}{(k^2-1)(\sin\varphi_0 - \varphi_0\cos\varphi_0)}, \\ A_5 &= \frac{w_0\sin\varphi_0 - \frac{v_0}{2}\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0 - \varphi_0\cos\varphi_0} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\text{mit} \\ &w_0 = -\frac{p r_1^2}{E F} \\ &\text{und} \\ &v_0 = -w'_0\varphi'_0 = \frac{p' r_1'^2}{E F}\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Schließlich wird noch mit A_4 aus (27) und $v_0 = -w_0'\varphi_0'$ aus der vorletzten Gleichung von (25)

$$\frac{p'}{p} = 1 - \frac{w_0}{r_0} \cdot \frac{k^2\left(1 + \frac{w_0'\varphi_0'/2}{w_0\varphi_0}\right)}{(k^2-1)\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\varphi_0} - 1\right)} .$$

Dieser Ausdruck geht mit $\frac{w_0'}{w_0} \approx \frac{p'}{p}$ und $w_0 = -\frac{p r_1^2}{EF} = -(k^2-1)\frac{J}{F r_1} \approx -(k^2-1)\frac{J}{F r_0}$ über in

$$\frac{p'}{p} \approx \frac{1 + \frac{J}{F r_0^2} \cdot \frac{k^2}{\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\varphi_0} - 1}}{1 - \frac{J}{F r_0^2} \cdot \frac{k^2}{\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\varphi_0} - 1} \cdot \frac{\varphi_0'/2}{\varphi_0}} . \quad (28)$$

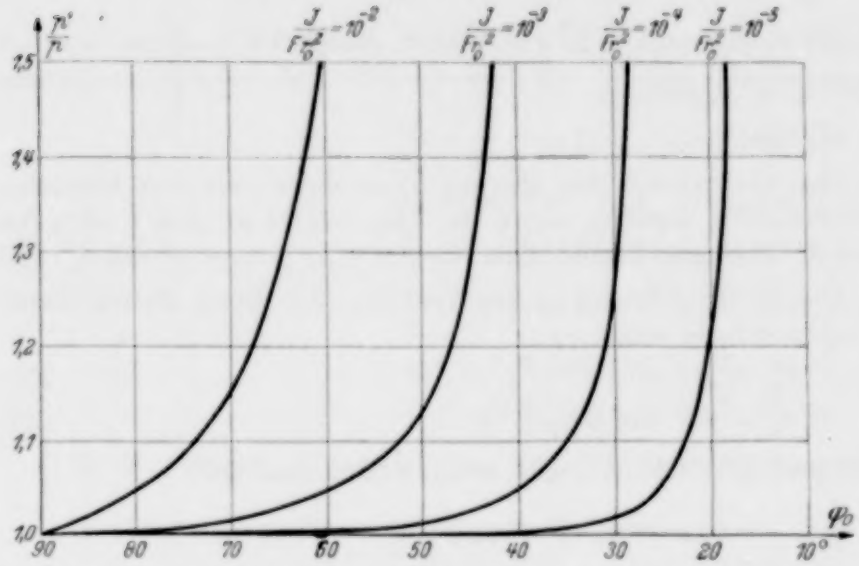

Abb. 7. Druckverhältnis p'/p in Abhängigkeit von φ_0 für verschiedene Werte J/Fr_0^2 nach Gl. (28).

In Abb. 7 ist das Druckverhältnis p'/p nach (28) in Abhängigkeit vom Winkel φ_0 für verschiedene Werte $\frac{J}{Fr_0^2}$ dargestellt. Im Bereich der besonders interessierenden Winkel $\varphi_0\left(\frac{\pi}{2} > \varphi_0 > \frac{\pi}{4}\right)$ ist für die praktisch vorkommenden Werte $\frac{J}{Fr_0^2} < 10^{-4}$ das Verhältnis der Drücke p'/p nur sehr wenig größer als 1, so daß in der Regel zur Bestimmung der Schnittkräfte im Ring mit $p' \approx p$ gerechnet werden kann. Wegen der zur Ableitung benutzten Näherungen enthält (28) einen mit wachsendem Druckverhältnis p'/p zunehmenden Fehler.

Mit der Bedingung (24) wird aus den Gleichungssystemen (21) und (22)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v_0}{2} &= A_2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin\varphi_0 + A_5\varphi_0 ,\\
w_0 &= A_2 k \cos k\varphi_0 + A_4 \cos\varphi_0 + A_5 ,\\
0 &= A_2 k^2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin\varphi_0 ,\\
-v_0 &= A_5'\varphi_0' ,\\
w_0' &= -A_2' k' + A_5' ,\\
\frac{1}{r_1^2}(A_2 k^3 \cos k\varphi_0 + A_4 \cos\varphi_0) &= -\frac{1}{r_1'^2} A_2' k'^3 ,\\
\frac{p'}{p} &= 1 + \frac{A_4}{r_0}\cos\varphi_0 ,\\
P' &= p A_4 \sin\varphi_0 .
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Aus (29) können die Konstanten A_2, A_4, A_5, A_2' und A_5', sowie v_0, P' und k eindeutig gewonnen werden, da die Zahl der Unbekannten mit der der Gleichungen übereinstimmt. Die explizite Darstellung von $\frac{p'}{p} = f(\varphi_0)$ ist jedoch, wenn überhaupt möglich, nur mit großen Schwierigkeiten durchzuführen. Da zudem die Lösung mit Bedingung (24) nur theoretischen Wert hat und auch hier für die praktisch interessierenden Werte J/Fr_0^2 und φ_0 wegen $A_4 \ll r_0$ der Druck $p' \approx p$ sein muß, soll auf den Versuch einer expliziten Darstellung von $\frac{p'}{p} = f(\varphi_0)$ verzichtet werden.

Für die Umgebung von $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ wird für $\varphi_0 \gtrless \frac{\pi}{3}$ die Konstante $A_4 \gtrless 0$ und damit $p'/p \gtrless 1$, sowie $P' \gtrless 0$. Da vom Außen- auf den Innenring nur Stützkräfte $P' \geq 0$ ausgeübt werden können, hat die Bedingung (24) für $\varphi_0 < \frac{\pi}{3}$ keine Bedeutung mehr.

In Abb. 8 sind die Belastungswerte k und k' nach den Bedingungen (23) und (24) in Abhängigkeit vom Winkel φ_0 aufgetragen. Hierbei wurde in beiden Fällen von der Näherung $k' \approx k$ Gebrauch gemacht. Danach wird sich der an zwei gegenüberliegenden Punkten gestützte Ring nach Überschreitung der für ihn gültigen oberen Belastungsgrenze $k^o = 3{,}00$ wie folgt verhalten:

Mit wachsendem k legt sich der Innenring mit einem an Länge zunehmenden Bogen 1′ an den Außenring an. Der in diesem Teil auf den Innenring ausgeübte Druck p' ist im Bereich der praktisch interessierenden Werte $J/F\, r_0^2$ nur sehr wenig größer als p. Der Öffnungswinkel $2\varphi_0$ der nicht am Außenring anliegenden Bögen 1 hängt nach (26) mit dem Belastungswert k zusammen. Der am Außenring anliegende Teil des Innenringes erfährt gegenüber dem unbelasteten Zustand keine Krümmungsänderung, so daß in ihm das Biegungsmoment M' und die Querkraft Q' verschwinden.

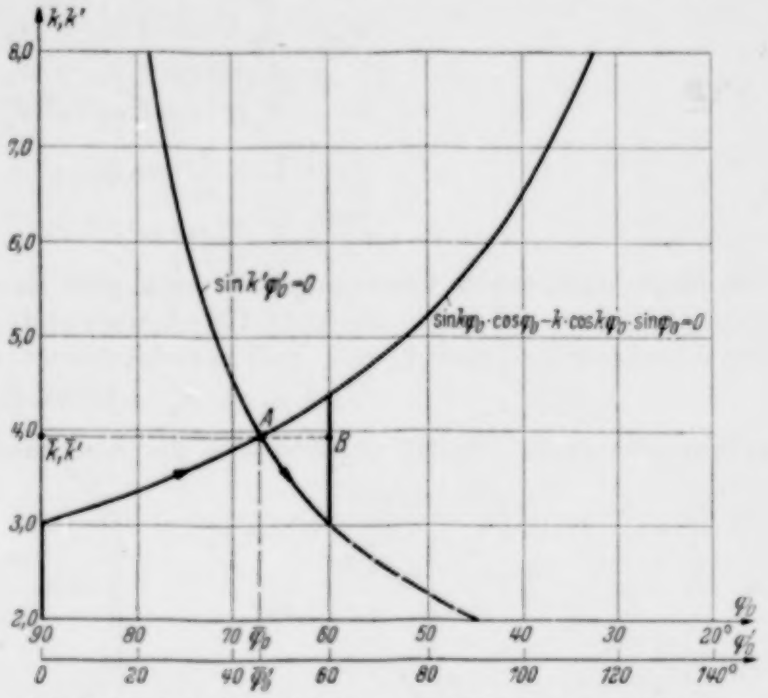

Abb. 8. $k \approx k'$ in Abhängigkeit von den Winkeln φ_0 und φ'_0 für die Ringform nach Abb. 5 entsprechend den Bedingungen (23) und (24).

Von einem bestimmten Belastungswert $\bar{k}$ ab, dem bestimmte Winkel $\bar{\varphi}_0$ und $\bar{\varphi}'_0$ zugeordnet sind und dessen Größe sich aus dem Schnittpunkt A der Kurven $\sin k' \varphi'_0 = 0$ und $\sin k\varphi_0 \cos \varphi_0 - k \cos k\varphi_0 \sin \varphi_0 = 0$ ergibt, läßt sich ein weiteres Anwachsen des Winkels φ'_0 mit kleiner werdendem Belastungswert k erreichen. Dabei nehmen die Stützkräfte P und P', sowie die tangentialen Verschiebungen v_0 ab, bis sie bei $k = 3$ ($\varphi_0 = \varphi'_0 = 60^0$) verschwinden. Gleichzeitig hebt sich der Bogen 1′ vom Außenring zunehmend ab. Am Ende dieses Vorganges besteht der Ring aus drei gleich belasteten und verformten Bögen von gleichem Öffnungswinkel. Der zugehörige Belastungswert $k = 3$ entspricht der dieser Ringform zugeordneten unteren Belastungsgrenze k^u, deren Bedeutung schon vorher erläutert worden ist.

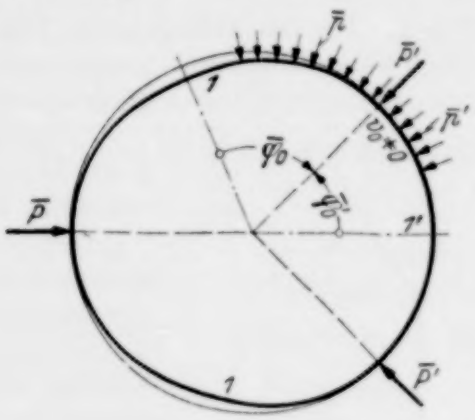

Abb. 9a. Ring unmittelbar vor dem Durchschlagen.

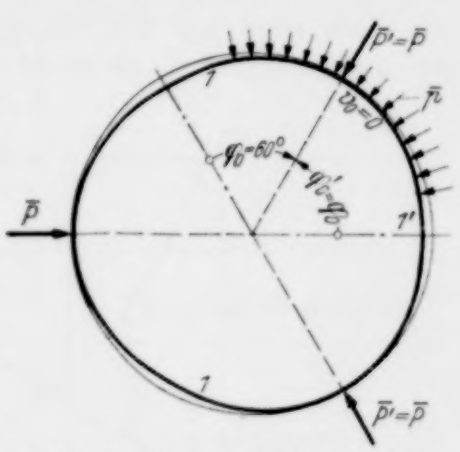

Abb. 9b. Ring unmittelbar nach dem Durchschlagen.

Wird $k = \bar{k}$ konstant gehalten, so erfolgt der Übergang des Ringes von der in Abb. 9a dargestellten Form in den Zustand entsprechend Abb. 9b schlagartig, so daß hier eine Durchschlagerscheinung ähnlich wie beim durchbiegungsbegrenzten, geraden Knickstab vorliegt. Dabei geht die dem Punkt A zugeordnete Ringform unmittelbar in die dem Punkt B entsprechende über (Abb. 8).

Eine zweite Möglichkeit für den Übergang des an zwei Punkten gestützten Ringes in die Grundform mit 3 Anlagestellen ergibt sich, wenn in den Gleichungssystemen (21) und (22) unter Beibehaltung aller Bezeichnungen $Q_{\varphi=\varphi_0} = Q_{\varphi=-\varphi_0} = 0$ gesetzt wird. Das liefert wegen $Q_{\varphi=\varphi_0} = p A_4 \sin \varphi_0$ und $p \neq 0$ für $A_4 = 0$, und damit aus der dritten Gleichung von (21) die beiden Bedingungen

$$A_2 = A_4 = 0\,, \tag{30}$$

$$A_4 = 0;\ \sin k\varphi_0 = 0\,, \tag{31}$$

von denen wenigstens eine erfüllt sein muß.

Die Bedingung (30) sagt aus, daß die beiden Bögen 1 am Außenring anliegen, so daß darin $M = Q = 0$ sein müssen. Außerdem verschwindet dabei die Stützkraft P. Mit (30) ergibt sich aus (21) und (22)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v_0}{2} &= A_5\,\varphi_0\,,\\
w_0 &= A_5\,,\\
-v_0 &= A_2'\sin k'\varphi_0' + A_4'\sin\varphi_0' + A_5'\varphi_0'\,,\\
w_0' &= A_2'k'\cos k'\varphi_0' + A_4'\cos\varphi_0' + A_5'\,,\\
0 &= A_2'k'^2\sin k'\varphi_0' + A_4'\sin\varphi_0'\,,\\
0 &= A_2'k'^3\cos k'\varphi_0' + A_4'\cos\varphi_0'\,,\\
\frac{p}{p'} &= 1 + \frac{A_4'}{r_0}\cos\varphi_0'\,,\\
P' &= p'\,A_4'\sin\varphi_0'\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Die fünfte und sechste Gleichung (32) verlangen, da nicht der gesamte Innenring am Außenring anliegen kann und auch die erste Gleichgewichtsform hier ausscheidet, daß wenigstens eine der Konstanten A_2' und A_4' von Null verschieden ist, so daß die Bedingung

$$\sin k'\varphi_0'\cos\varphi_0' - k'\cos k'\varphi_0'\sin\varphi_0' = 0 \qquad (33)$$

erfüllt sein muß. Damit ergeben sich die Konstanten nach (32) zu

$$\left.\begin{aligned}
A_2' &= \frac{(w_0'\varphi_0' - v_0')\sin\varphi_0'}{(k'^2-1)\sin k'\varphi_0'(\sin\varphi_0' - \varphi_0'\cos\varphi_0')}\,,\\
A_4' &= -\frac{(w_0'\varphi_0' - v_0')\,k'^2}{(k'^2-1)(\sin\varphi_0' - \varphi_0'\cos\varphi_0')}\,,\\
A_5' &= \frac{w_0'\sin\varphi_0' - v_0'\cos\varphi_0'}{\sin\varphi_0' - \varphi_0'\cos\varphi_0'}
\end{aligned}\right| \quad \text{mit} \quad \left|\begin{aligned} w_0' &= -\frac{p'\,r_1'^2}{E\,F}\\ v_0' &= -v_0 = -2\,w_0\varphi_0 = 2\frac{p\,r_1^2}{E\,F}\varphi_0\,. \end{aligned}\right. \qquad (34)$$

Nach (32) ergibt sich das Druckverhältnis p/p' mit A_4' nach (34) und $v_0' = -2\,w_0\varphi_0$ zu

$$\frac{p}{p'} = 1 - \frac{w_0'}{r_0}\cdot\frac{k'^2\left(1 + \dfrac{w_0\varphi_0}{w_0'\varphi_0'/2}\right)}{(k'^2-1)\left(\dfrac{\operatorname{tg}\varphi_0'}{\varphi_0'} - 1\right)}\,. \qquad (35)$$

Hiernach wird $p/p' \gtrless 1$ für $\varphi_0' \lesseqgtr \pi/2$. Da im anliegenden Teil des Ringes der Druck stets gleich oder größer als im nicht anliegenden Ringbereich sein muß, hat der vorliegende Fall nur Bedeutung für $\varphi_0' \leqq \pi/2$.

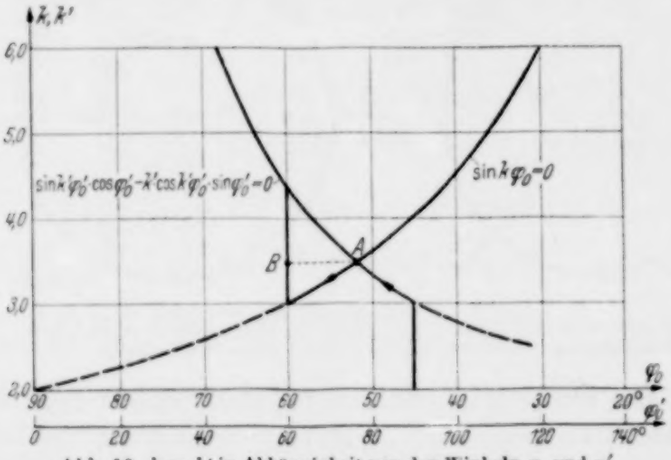

Abb. 10. $k \approx k'$ in Abhängigkeit von den Winkeln φ_0 und φ_0' entsprechend den Bedingungen (30) und (31).

Die Bedingung (31) kennzeichnet auch hier eine Durchschlagerscheinung, wie Abb. 10 zeigt. Dort sind die Kurven $\sin k'\varphi_0'\cos\varphi_0' - k'\cos k'\varphi_0'\sin\varphi_0' = 0$ und $\sin k\varphi_0 = 0$ aufgetragen. Wegen der bereits früher erläuterten Gründe ist $k \approx k'$ und daher auch hier auf eine getrennte Darstellung von k' und k verzichtet worden.

Nach Abb. 10 stellt sich der Übergangsvorgang wie folgt dar: Ausgehend von der Ringform nach Abb. 11b, die für $k = k' = 3$ bei $\varphi_0 = \pi/4$, $\varphi_0 = \pi/2$ und $P = 0$ gilt, legt sich der Innenring mit wachsendem k zunehmend an den Außenring an, wobei sich der Winkel φ_0 vergrößert und der Winkel φ_0' verkleinert, bis der Wert k' die dem Schnittpunkt A der beiden Kurven $\sin k'\varphi_0'\cos\varphi_0' - k'\cos k'\varphi_0'\sin\varphi_0' = 0$ und $\sin k\varphi_0 = 0$ entsprechende Größe erreicht hat. Hier geht der Ring schlagartig in die an 3 gleichmäßig über den Umfang verteilten Punkten gestützte Form über (Punkt B in Abb. 10 mit $\varphi_0 = \varphi_0' = 60°$).

Es bleibt noch festzustellen, wie sich der Übergang von der in Abb. 11a dargestellten Ringform zu der Ringform nach Abb. 11b vollzieht und ob ein solcher überhaupt möglich ist. Nach

den bisherigen Darlegungen kann die Ringform nach Abb. 11a für $2 \leq k' \leq 3$ und die Ringform nach Abb. 11b für $k' = 3$ bestehen.

Für die folgenden Betrachtungen wird ein Ring nach Abb. 12 zugrundegelegt. Dabei wird zur Unterscheidung der auf die Ringhälfte 1 wirkende Druck mit p und der auf die Ringhälfte 1′ wirkende mit p′ bezeichnet. Die Verschiebungen der Enden der Bögen 1 und 1′ sind in Abb. 12 eingetragen. Es ist $r_0 = -r_0'$. Mit den Grenzbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v &= \pm v_0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm \varphi_0 , \\ w &= w_0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm \varphi_0 , \\ \frac{dw}{d\varphi} &= 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm \varphi_0 \end{aligned}\right\} \text{für die Ringhälfte 1,}$$

$$\left.\begin{aligned} v' &= \pm v_0' \quad \text{für} \quad \varphi' = \pm \varphi_0' , \\ w' &= w_0' \quad \text{für} \quad \varphi' = \pm \varphi_0' , \\ \frac{dw'}{d\varphi'} &= 0 \quad \text{für} \quad \varphi' = \pm \varphi_0' \end{aligned}\right\} \text{für die Ringhälfte 1′}$$

Abb. 11a. Mögliche Ringform für $2 \leq k \leq 3$.

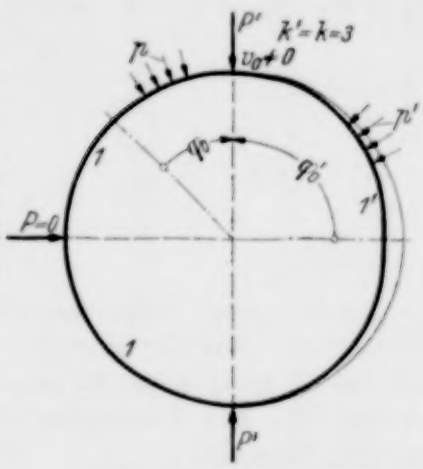

Abb. 11b. Mögliche Ringform für $k' = k = 3$.

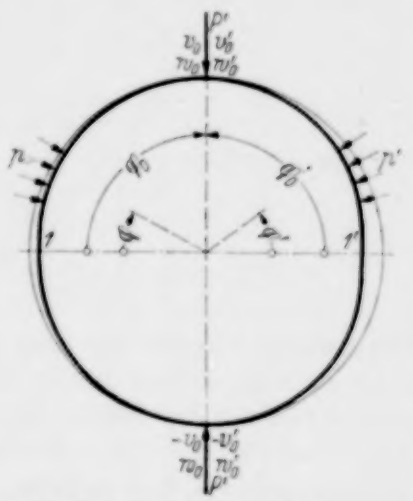

Abb. 12. Zum Übergang der Ringform nach Abb. 11a in die Ringform nach Abb. 11b.

ergeben sich aus (8) wegen

$$A_1 = A_3 = A_6 = 0 \text{ für die Ringhälfte 1,}$$
$$A_1' = A_3' = A_6' = 0 \text{ für die Ringhälfte 1′}$$

die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= A_2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 + A_5 \varphi_0 , \\ w_0 &= A_2 k \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0 + A_5 , \\ 0 &= A_2 k^2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 , \\ r_0' &= A_2' \sin k'\varphi_0' + A_4' \sin \varphi_0' + A_5' \varphi_0' , \\ w_0' &= A_2' k' \cos k'\varphi_0' + A_4' \cos \varphi_0' + A_5' , \\ 0 &= A_2' k'^2 \sin k'\varphi_0' + A_4' \sin \varphi_0' . \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Die Gleichheit der Schnittkräfte an den Übergangsstellen der beiden Ringhälften verlangt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_1^2}(A_2 k^3 \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0) &= \frac{1}{r_1'^2}(A_2' k'^3 \cos k'\varphi_0' + A_4' \cos \varphi_0') , \\ p(r_0 + A_4 \cos \varphi_0) &= p'(r_0 + A_4' \cos \varphi_0') , \\ P' &= p A_4 \sin \varphi_0 + p' A_4' \sin \varphi_0' . \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Mit $\cos \varphi_0 = \cos \varphi_0' = 0$ wird aus der mittleren Gleichung von (37) wie es sein muß $k' = k$, und damit $w_0' = w_0$ sowie $r_1' = r_1$. Die Gleichungssysteme (36) und (37) gehen damit bei

gleichzeitiger Berücksichtigung von $\varphi_0 = \varphi_0' = \pi/2$ und $\sin\varphi_0 = \sin\varphi_0' = 1$ über in

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= A_2 \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4 + A_5\tfrac{\pi}{2}, \\ w_0 &= A_2 k \cos k\tfrac{\pi}{2} + A_5, \\ 0 &= A_2 k^2 \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4, \\ -v_0 &= A_2' \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4' + A_5'\tfrac{\pi}{2}, \\ w_0 &= A_2' k \cos k\tfrac{\pi}{2} + A_5', \\ 0 &= A_2' k^2 \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4', \\ 0 &= (A_2 - A_2') k^3 \cos k\tfrac{\pi}{2}, \\ P' &= p\,(A_4 + A_4'). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Die vorletzte Gleichung dieses Systems wird entweder befriedigt durch

$$A_2 - A_2' = 0, \tag{39}$$

oder durch

$$\cos k\tfrac{\pi}{2} = 0. \tag{40}$$

Mit der Bedingung (39) wird aus (38)

$$\left.\begin{aligned} &A_4 - A_4' = 0, \quad A_5 - A_5' = 0, \quad v_0 = 0, \quad P' = 2\,p\,A_4, \\ &A_2 = \frac{w_0 \frac{\pi}{2}}{(k^2-1)\sin k\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\cos k\frac{\pi}{2}}, \\ &A_4 = -\frac{w_0 k^2 \frac{\pi}{2}\sin k\frac{\pi}{2}}{(k^2-1)\sin k\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\cos k\frac{\pi}{2}}, \\ &A_5 = \frac{w_0 (k^2-1)\sin k\frac{\pi}{2}}{(k^2-1)\sin k\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\cos k\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die untere Grenze des zur Bedingung (39) gehörenden Belastungsbereiches ergibt sich aus dem Verschwinden der Stützkraft P'. Dies ist der Fall für $\sin k\frac{\pi}{2} = 0$ oder $k^u = 2$. An der oberen Grenze des Belastungsbereiches muß das Biegungsmoment an der Stützstelle verschwinden, was für $\cos k\frac{\pi}{2} = 0$ oder für $k^o = 3$ eintritt. Die Bedingung für die obere Grenze des Belastungsbereiches stimmt demnach mit (40) überein.

Die Bedingung (40) liefert als kleinsten Belastungswert $k = 3$. Damit wird $\sin k\frac{\pi}{2} = -1$ und unter Berücksichtigung von $A_5 = A_5' = w_0$ nach der zweiten und fünften Gleichung ergibt sich aus (38)

$$\left.\begin{aligned} -w_0\tfrac{\pi}{2} &= -A_2 + A_4 - v_0, \\ 0 &= -A_2 k^2 + A_4, \\ -w_0\tfrac{\pi}{2} &= -A_2' + A_4' + v_0, \\ 0 &= -A_2' k^2 + A_4', \\ P' &= p\,(A_4 + A_4'). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Das System (42) enthält eine Unbekannte mehr als Gleichungen, so daß eine der Unbekannten frei gewählt werden darf. Gleichung (40) stellt somit eine Stabilitätsbedingung für den an zwei gegenüberliegenden Punkten gestützten Ring dar. Hieraus ist zu schließen, daß für $k = 3$ die in Abb. 11a dargestellte Ringform in die in Abb. 11b gezeigte Form übergehen kann. Wird nämlich in (42) v_0 so gewählt, daß die Gleichung

$$v_0 - w_0\tfrac{\pi}{2} = 0 \tag{43}$$

erfüllt ist, dann ergibt sich damit aus (42)

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= A_4 = 0, \\ -w_0\pi &= -A_2' + A_4', \\ 0 &= -A_2' k^2 + A_4', \\ P' &= p\,A_4', \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

womit die Ringhälfte 1 nach Abb. 12 am Außenring anliegt.

Neben den schon behandelten Übergangsformen des Ringes ist noch die in Abb. 13 dargestellte Gleichgewichtsform für den Übergang eines Ringes von der an zwei gegenüberliegenden Punkten gestützten Form in die an vier in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten gestützte Form denkbar. Mit den Bezeichnungen der Abb. 13 lauten die Grenzbedingun-

gen für die Enden der Bögen 1 und 1′:

$$
\begin{aligned}
v &= \pm v_0 && \text{für} && \varphi = \pm \varphi_0 ,\\
w &= w_0 && \text{für} && \varphi = \pm \varphi_0 ,\\
\frac{dw}{d\varphi} &= 0 && \text{für} && \varphi = \pm \varphi_0 ,\\
v' &= \pm v_0' && \text{für} && \varphi' = \pm \varphi_0' ,\\
w' &= w_0' && \text{für} && \varphi' = \pm \varphi_0' ,\\
\frac{dw'}{d\varphi'} &= 0 && \text{für} && \varphi' = \pm \varphi_0' .
\end{aligned}
$$

Mit diesen Bedingungen ergibt sich aus (8) unter Beachtung von

$$A_1 = A_3 = A_6 = 0 \quad \text{für Bogen 1,}$$
$$A_1' = A_3' = A_6' = 0 \quad \text{für Bogen 1′}$$

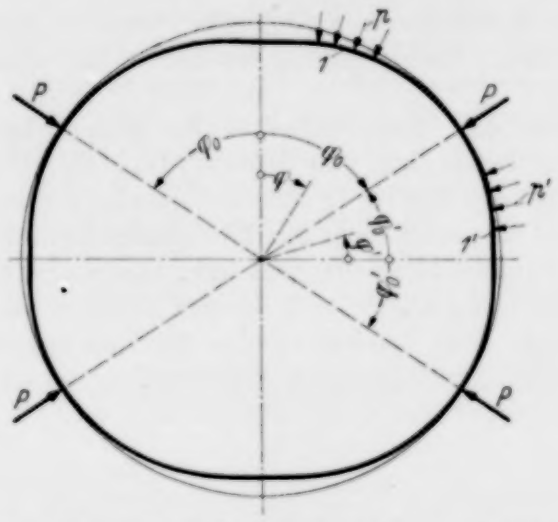

Abb. 13. Ring beim Übergang von der an zwei gegenüberliegenden Punkten gestützten Form in die an vier in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten gestützte Form.

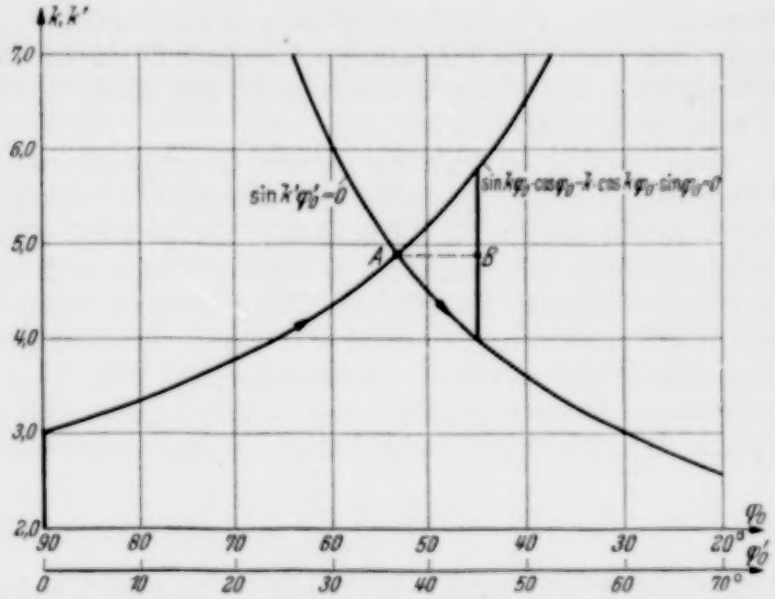

Abb. 14. $k \approx k'$ in Abhängigkeit von den Winkeln φ_0 und φ_0' entsprechend den Bedingungen (46) und (47).

und $v_0' = -v_0$, sowie wegen der Gleichheit der Schnittkräfte an den Stützstellen, das folgende Gleichungssystem:

$$
\left.
\begin{aligned}
v_0 &= A_2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 + A_5 \varphi_0 , & -v_0 &= A_2' \sin k'\varphi_0' + A_4' \sin \varphi_0' + A_5 \varphi_0' ,\\
w_0 &= A_2 k \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0 + A_5 , & w_0' &= A_2' k' \cos k'\varphi_0' + A_4' \cos \varphi_0' + A_5' ,\\
0 &= A_2 k^2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 , & 0 &= A_2' k'^2 \sin k'\varphi_0' + A_4' \sin \varphi_0' ,\\
\frac{1}{r_1^2}(A_2 k^3 \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0) &= \frac{1}{r_1'^2}(A_2' k'^3 \cos k'\varphi_0' + A_4' \cos \varphi_0') ,\\
p(r_0 + A_4 \cos \varphi_0) &= p'(r_0 + A_4' \cos \varphi_0') ,\\
P &= p A_4 \sin \varphi_0 + p' A_4' \sin \varphi_0' .
\end{aligned}
\right\} \qquad (45)
$$

Ist der Ausgangszustand der in Abb. 13 dargestellten Ringform durch $\varphi_0' = 0$ gekennzeichnet, so läßt sie sich dann mit den kleinsten äußeren Drücken p und p' aufrechterhalten, wenn die Querkräfte an den Enden des Bogens 1′ $Q'_{\varphi'=\varphi_0'} = Q'_{\varphi'=-\varphi_0'} = 0$ sind. Hieraus folgt wegen $Q'_{\varphi'=\varphi_0'} = p' A_4' \sin \varphi_0'$ und $p' \neq 0$ für $A_4' = 0$. Damit ergeben sich aus der sechsten Gleichung (45) die folgenden beiden Bedingungen, von denen mindestens eine erfüllt sein muß:

$$A_2' = A_4' = 0 , \qquad (46)$$

$$A_4' = 0; \quad \sin k' \varphi_0' = 0 . \qquad (47)$$

Mit (46) ergibt sich aus der dritten und siebenten Gleichung (45)

$$\sin k\varphi_0 \cos \varphi_0 - k \cos k\varphi_0 \sin \varphi_0 = 0 . \qquad (48)$$

gleichzeitiger Berücksichtigung von $\varphi_0 = \varphi_0' = \pi/2$ und $\sin\varphi_0 = \sin\varphi_0' = 1$ über in

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= A_2 \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4 + A_5\tfrac{\pi}{2}, \\ w_0 &= A_2 k \cos k\tfrac{\pi}{2} + A_5, \\ 0 &= A_2 k^2 \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4, \\ -v_0 &= A_2' \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4' + A_5'\tfrac{\pi}{2}, \\ w_0 &= A_2' k \cos k\tfrac{\pi}{2} + A_5', \\ 0 &= A_2' k^2 \sin k\tfrac{\pi}{2} + A_4', \\ 0 &= (A_2 - A_2') k^3 \cos k\tfrac{\pi}{2}, \\ P' &= p\,(A_4 + A_4'). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Die vorletzte Gleichung dieses Systems wird entweder befriedigt durch

$$A_2 - A_2' = 0, \tag{39}$$

oder durch

$$\cos k\tfrac{\pi}{2} = 0. \tag{40}$$

Mit der Bedingung (39) wird aus (38)

$$\left.\begin{aligned} &A_4 - A_4' = 0, \quad A_5 - A_5' = 0, \quad v_0 = 0, \quad P' = 2\,p\,A_4, \\ &A_2 = \frac{w_0 \tfrac{\pi}{2}}{(k^2-1)\sin k\tfrac{\pi}{2} + k\tfrac{\pi}{2}\cos k\tfrac{\pi}{2}}, \\ &A_4 = -\frac{w_0 k^2 \tfrac{\pi}{2}\sin k\tfrac{\pi}{2}}{(k^2-1)\sin k\tfrac{\pi}{2} + k\tfrac{\pi}{2}\cos k\tfrac{\pi}{2}}, \\ &A_5 = \frac{w_0 (k^2-1)\sin k\tfrac{\pi}{2}}{(k^2-1)\sin k\tfrac{\pi}{2} + k\tfrac{\pi}{2}\cos k\tfrac{\pi}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die untere Grenze des zur Bedingung (39) gehörenden Belastungsbereiches ergibt sich aus dem Verschwinden der Stützkraft P'. Dies ist der Fall für $\sin k\frac{\pi}{2} = 0$ oder $k^u = 2$. An der oberen Grenze des Belastungsbereiches muß das Biegungsmoment an der Stützstelle verschwinden, was für $\cos k\frac{\pi}{2} = 0$ oder für $k^o = 3$ eintritt. Die Bedingung für die obere Grenze des Belastungsbereiches stimmt demnach mit (40) überein.

Die Bedingung (40) liefert als kleinsten Belastungswert $k = 3$. Damit wird $\sin k\frac{\pi}{2} = -1$ und unter Berücksichtigung von $A_5 = A_5' = w_0$ nach der zweiten und fünften Gleichung ergibt sich aus (38)

$$\left.\begin{aligned} -w_0\tfrac{\pi}{2} &= -A_2 + A_4 - v_0, \\ 0 &= -A_2 k^2 + A_4, \\ -w_0\tfrac{\pi}{2} &= -A_2' + A_4' + v_0, \\ 0 &= -A_2' k^2 + A_4', \\ P' &= p\,(A_4 + A_4'). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Das System (42) enthält eine Unbekannte mehr als Gleichungen, so daß eine der Unbekannten frei gewählt werden darf. Gleichung (40) stellt somit eine Stabilitätsbedingung für den an zwei gegenüberliegenden Punkten gestützten Ring dar. Hieraus ist zu schließen, daß für $k = 3$ die in Abb. 11a dargestellte Ringform in die in Abb. 11b gezeigte Form übergehen kann. Wird nämlich in (42) v_0 so gewählt, daß die Gleichung

$$v_0 - w_0\tfrac{\pi}{2} = 0 \tag{43}$$

erfüllt ist, dann ergibt sich damit aus (42)

$$\left.\begin{aligned} &A_2 = A_4 = 0, \\ -w_0\pi &= -A_2' + A_4', \\ 0 &= -A_2' k^2 + A_4', \\ P' &= p\,A_4', \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

womit die Ringhälfte 1 nach Abb. 12 am Außenring anliegt.

Neben den schon behandelten Übergangsformen des Ringes ist noch die in Abb. 13 dargestellte Gleichgewichtsform für den Übergang eines Ringes von der an zwei gegenüberliegenden Punkten gestützten Form in die an vier in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten gestützte Form denkbar. Mit den Bezeichnungen der Abb. 13 lauten die Grenzbedingun-

gen für die Enden der Bögen 1 und 1′:

$$
\begin{aligned}
v &= \pm v_0 && \text{für} && \varphi = \pm \varphi_0 ,\\
w &= w_0 && \text{für} && \varphi = \pm \varphi_0 ,\\
\frac{dw}{d\varphi} &= 0 && \text{für} && \varphi = \pm \varphi_0 ,\\
v' &= \pm v_0' && \text{für} && \varphi' = \pm \varphi_0' ,\\
w' &= w_0' && \text{für} && \varphi' = \pm \varphi_0' ,\\
\frac{dw'}{d\varphi'} &= 0 && \text{für} && \varphi' = \pm \varphi_0' .
\end{aligned}
$$

Mit diesen Bedingungen ergibt sich aus (8) unter Beachtung von

$$A_1 = A_3 = A_6 = 0 \quad \text{für Bogen 1,}$$
$$A_1' = A_3' = A_6' = 0 \quad \text{für Bogen 1′}$$

Abb. 13. Ring beim Übergang von der an zwei gegenüberliegenden Punkten gestützten Form in die an vier in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten gestützte Form.

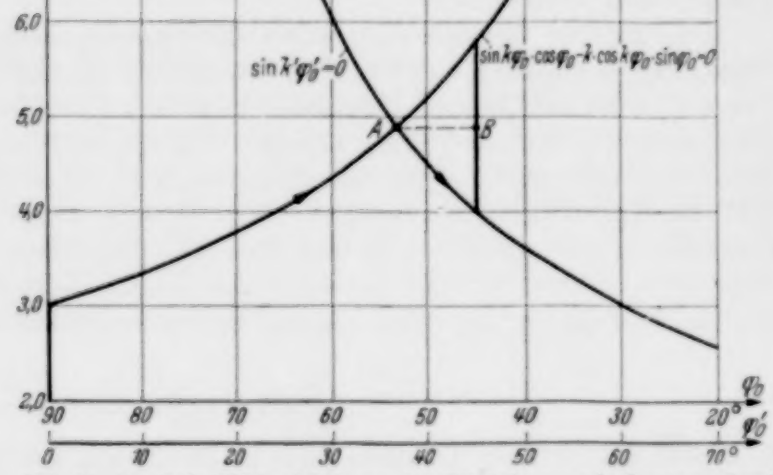

Abb. 14. $k \approx k'$ in Abhängigkeit von den Winkeln φ_0 und φ_0' entsprechend den Bedingungen (46) und (47).

und $v_0' = -v_0$, sowie wegen der Gleichheit der Schnittkräfte an den Stützstellen, das folgende Gleichungssystem:

$$
\left.
\begin{aligned}
v_0 &= A_2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 + A_5 \varphi_0 , & -v_0 &= A_2' \sin k'\varphi_0' + A_4' \sin \varphi_0' + A_5 \varphi_0' ,\\
w_0 &= A_2 k \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0 + A_5 , & w_0' &= A_2' k' \cos k'\varphi_0' + A_4' \cos \varphi_0' + A_5' ,\\
0 &= A_2 k^2 \sin k\varphi_0 + A_4 \sin \varphi_0 , & 0 &= A_2' k'^2 \sin k'\varphi_0' + A_4' \sin \varphi_0' ,\\
\frac{1}{r_1^2}(A_2 k^3 \cos k\varphi_0 + A_4 \cos \varphi_0) &= \frac{1}{r_1'^2}(A_2' k'^3 \cos k'\varphi_0' + A_4' \cos \varphi_0') ,\\
p(r_0 + A_4 \cos \varphi_0) &= p'(r_0 + A_4' \cos \varphi_0') ,\\
P &= p A_4 \sin \varphi_0 + p' A_4' \sin \varphi_0' .
\end{aligned}
\right\} \qquad (45)
$$

Ist der Ausgangszustand der in Abb. 13 dargestellten Ringform durch $\varphi_0' = 0$ gekennzeichnet, so läßt sie sich dann mit den kleinsten äußeren Drücken p und p' aufrechterhalten, wenn die Querkräfte an den Enden des Bogens 1′ $Q'_{\varphi'=\varphi_0'} = Q'_{\varphi'=-\varphi_0'} = 0$ sind. Hieraus folgt wegen $Q'_{\varphi'=\varphi_0'} = p' A_4' \sin \varphi_0'$ und $p' \neq 0$ für $A_4' = 0$. Damit ergeben sich aus der sechsten Gleichung (45) die folgenden beiden Bedingungen, von denen mindestens eine erfüllt sein muß:

$$A_2' = A_4' = 0 , \qquad (46)$$

$$A_4' = 0; \quad \sin k' \varphi_0' = 0 . \qquad (47)$$

Mit (46) ergibt sich aus der dritten und siebenten Gleichung (45)

$$\sin k\varphi_0 \cos \varphi_0 - k \cos k\varphi_0 \sin \varphi_0 = 0 . \qquad (48)$$

Auf eine Fortführung der Rechnung kann verzichtet werden, da sie gegenüber den früheren Feststellungen keine neuen Erkenntnisse bringt. Es wird auch hier im Bereich der interessierenden Winkel φ_0 und der praktisch vorkommenden Werte $J/F r_0^2$ wieder $p' \approx p$, so daß bei der Darstellung von k und k' in Abb. 14 entsprechend den Bedingungen (47) und (48) nur eine der jeweils zwei nahezu zusammenfallenden Kurven gezeichnet worden ist. Danach wächst zunächst φ_0' mit k, wobei die Bögen l' des Ringes am Außenring anliegen. Im Schnittpunkt A der beiden dargestellten Kurven schlagen die Bögen l' des Ringes durch und heben sich bei gleichzeitiger Vergrößerung der Winkel φ_0' vom Außenring ab, bis $\varphi_0' = \varphi_0$ geworden ist, d. h. bis der Ring aus vier gleichen Bögen besteht (Punkt B in Abb. 14).

5. Zusammenfassung. Behandelt wurde das Verhalten eines Kreisringträgers mit nach außen hin begrenzter Verformung bei überkritischem Außendruck. Das Problem hat praktische Bedeutung im Schachtausbau.

Die Arbeit beschränkt sich auf die Darstellung der möglichen Gleichgewichtsformen des Innenringes. Es zeigte sich, daß es Grundformen gibt, bei denen der Innenring an mehreren, in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Punkten vom Außenring gestützt wird. Diesen Formen konnten in Abhängigkeit von der Zahl der Stützstellen Belastungsbereiche $k^u \leq k \leq k^o$ zugeordnet werden. Die unteren Grenzen k^u dieser Bereiche wurden aus dem Verschwinden der Stützkräfte, die oberen Grenzen k^o aus dem Verschwinden der Biegungsmomente an den Stützstellen ermittelt.

Eine zweite Gruppe möglicher Gleichgewichtsformen des Innenringes ergibt sich beim Übergang von einer Grundform in eine andere mit einer größeren Zahl von Stützstellen. Solche Formen wurden für den Übergang von dem zweipunktig gestützten in den dreipunktig und vierpunktig gestützten Ring gezeigt. Im ersten Stadium zeichnen sich die Übergangsformen durch am Außenring anliegende Ringteile aus, deren Öffnungswinkel mit dem Belastungswert k wächst. Im zweiten Stadium tritt eine Durchschlagerscheinung auf, durch die der Ring in die Grundform mit größerer Stützstellenzahl überführt wird. Das Verhalten des verformungsbegrenzten Kreisringträgers zeigt daher Ähnlichkeit mit dem eines geraden Knickstabes, wenn dessen Durchbiegung nach beiden Seiten begrenzt ist.

(Eingegangen am 9. März 1954.)

Anschrift des Verfassers: *Heinz Link* in Fa. Fried. Krupp, Maschinen- und Stahlbau Rheinhausen, (22a) Rheinhausen.

Wärmespannungen beim Anheizen von Kesseltrommeln.*

Herrn Professor Dr. *R. Grammel* zum 65. Geburtstag.

Von **K. Zoller.**

1. Einleitung. Beheizte Kesseltrommeln werden im stationären Betriebszustand im wesentlichen durch den Innendruck beansprucht, während Wärmespannungen bei geeigneter Lagerung und Formgebung nur eine untergeordnete Rolle spielen. Anders beim Anheizen: Hier treten Wärmespannungen auf, die sogar die Festigkeit des Kessels gefährden können, wenn man die Anheizzeit zu kurz wählt. Der Betrag dieser Spannungen hängt auch von der Art und Weise des Anheizens, d. h. vom zeitlichen Temperaturverlauf ab. Die wichtigsten Erscheinungen hierbei rechnerisch zu erfassen und an einem Zahlenbeispiel zu erläutern, ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung.

In ihr wollen wir das Problem soweit vereinfachen, daß es noch mit erträglichem Rechenaufwand gelöst werden kann und doch praktisch brauchbare Ergebnisse liefert. Ganz außer Betracht mögen die Verhältnisse im Kesselboden und in der Übergangszone vom Kesselboden zum Kesselmantel sowie der Einfluß der Lagerung bleiben. Demgemäß ersetzen wir die Kesseltrommel durch ein unendlich langes kreiszylindrisches Rohr mit konstanter Wandstärke X, dem Innenhalbmesser r_0 und dem Außenhalbmesser r_1, das seitlich abgeschlossen und außen adiabatisch isoliert ist. Es wird beim Anheizen durch ein Dampf–Wassergemisch von der Temperatur $\vartheta_i(t)$ durchströmt, dessen Druck p_i mit dem Außendruck p_a übereinstimmt, solange ϑ_i kleiner als die zum Außendruck gehörige Verdampfungstemperatur ist, sonst aber

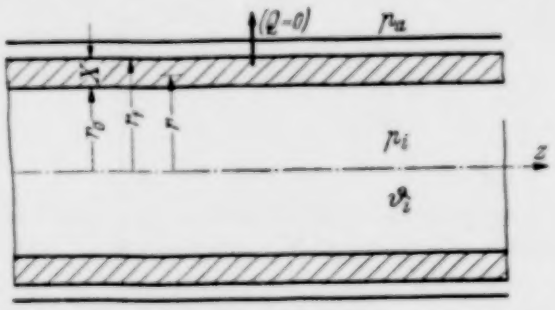

Abb. 1. Kesseltrommel.

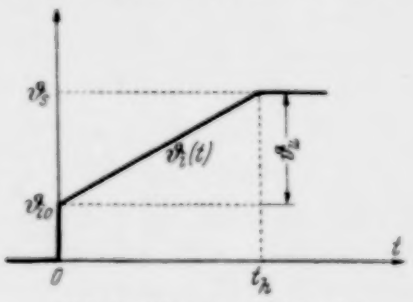

Abb. 2. Linearer Anstieg der Innentemperatur.

gleich dem zur Temperatur ϑ_i gehörigen Dampfdruck ist. Die stationären Werte von ϑ_i und p_i seien ϑ_s, p_s. Beginnt das Anheizen zur Zeit $t = 0$ sprungweise mit einer Temperatur $\vartheta_{i0} \geqq 0$, so erreicht die Kurve $\vartheta_i(t)$, ausgehend vom Punkt $(0, \vartheta_{i0})$, entweder nach endlicher Anheizzeit t_h oder auch asymptotisch den stationären Wert ϑ_s. Wir werden hauptsächlich die Wärmespannungen bei linearem Temperaturanstieg

$$\vartheta_i = \vartheta_i(t) = \begin{cases} \vartheta_{i0} + \vartheta_u \dfrac{t}{t_h} \quad \text{mit} \quad \vartheta_u = \vartheta_s - \vartheta_{i0} \quad (0 < t < t_h) \\ \vartheta_s \qquad (t_h < t) \end{cases}, \tag{1}$$

untersuchen und dürfen dabei die allgemeinen Formeln jeweils dadurch vereinfachen, daß wir die Kesseltrommel als dünnwandig ansehen und demgemäß die Lösung nach dem Parameter

$$\varepsilon = \frac{X}{r_1} \tag{2}$$

entwickeln und höhere Potenzen von ε vernachlässigen; hat doch z. B. ein auf $p_s = 125$ at beanspruchter Kessel von 8 m Länge und 2 m Durchmesser die Wandstärke 92 mm, so daß hier $\varepsilon = 0{,}092$ ist.

2. Stationäre Beanspruchung der Rohrwand. Das nach außen adiabatisch isolierte Rohr hat stationär überall dieselbe Temperatur ϑ_s. Da es in seiner thermischen Ausdehnung nirgends behindert sein soll, treten keine Wärmespannungen auf. Das Rohr wird lediglich

* Die Anregung zu dieser Untersuchung verdankt der Verf. Herrn Professor *U. Senger*.

durch den Innendruck $p_i = p_s(\vartheta_s)$ und den Außendruck p_a beansprucht. Die bekannten Formeln für die Radial- und Tangentialspannungen σ_r, σ_φ sowie — infolge der Druckbelastung p_i, p_a auch der seitlichen Abschlußkreisflächen des Rohres — für die Axialspannung σ_z ergeben

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r_1^2 - r_0^2}\left[r_0^2 p_i - r_1^2 p_a - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}(p_i - p_a)\right],\\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{r_1^2 - r_0^2}\left[r_0^2 p_i - r_1^2 p_a + \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}(p_i - p_a)\right],\\ \sigma_z &= \frac{1}{r_1^2 - r_0^2}(r_0^2 p_i - r_1^2 p_a).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die größte Spannung ist hierbei

$$\sigma_{max} = \sigma_\varphi(r_0) = \frac{1}{r_1^2 - r_0^2}\left[(r_0^2 + r_1^2)\, p_i - 2\, r_1^2\, p_a\right]. \tag{4}$$

Wir führen noch anstelle der Radialkoordinate r in der Wand eine x-Koordinate gemäß

$$x = r_1 - r \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x \leqq X \tag{5}$$

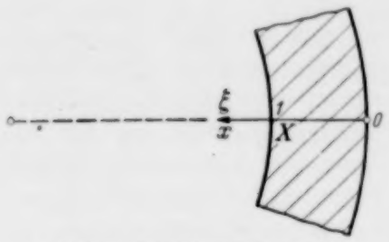

Abb. 3. Wandkoordinaten x, ξ.

und ihren bezogenen Wert

$$\xi = \frac{x}{X} = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1, \tag{6}$$

also umgekehrt

$$r = r_1 (1 - \varepsilon\, \xi) \quad . \tag{7}$$

ein. Nach Potenzen von ε entwickelt, sind dann die zur Belastung p_i, p_a gehörigen Spannungen

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\,p_i\,\xi - p_a(1 - \xi) + (\!(\varepsilon)\!),\\ \sigma_\varphi &= \frac{p_i - p_a}{\varepsilon} - \frac{1}{2}(p_i + p_a) - (p_i - p_a)(1 - \xi) + (\!(\varepsilon)\!),\\ \sigma_z &= \frac{p_i - p_a}{2\,\varepsilon} - \frac{1}{4}(3\,p_i + p_a) + (\!(\varepsilon)\!),\\ \sigma_{max} &= \frac{p_i - p_a}{\varepsilon} - \frac{1}{2}(p_i + p_a) + (\!(\varepsilon)\!).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

3. Das Temperaturfeld beim Anheizen. Die Wärmespannungen beim Anheizen hängen vom Temperaturfeld ab; daher bestimmen wir zuerst dieses. Bei dünner Rohrwand darf man hierbei von der Wandkrümmung absehen, so daß folgendes Wärmeübertragungsproblem vorliegt: Für Zeiten $t > 0$ das Temperaturfeld $\vartheta(x, t)$ in einer ebenen Platte (Dicke X, spezifisches Gewicht γ, Wärmeleitzahl λ) zu ermitteln, die auf der einen Seite adiabatisch isoliert ist, auf der andern Seite bei einer Wärmeübergangszahl α an ein Medium von der Temperatur $\vartheta_i(t)$ angrenzt. Die Anfangstemperatur der Platte möge $\vartheta(x, 0) = 0$ sein. Es bestehen also die Randbedingungen

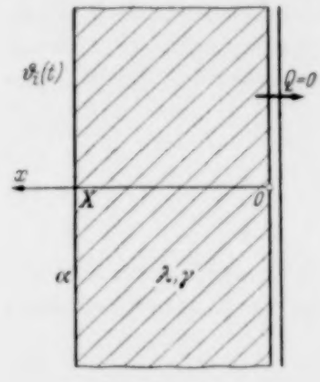

Abb. 4. Ebene Platte.

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x\,=\,0} = 0\,, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x\,=\,X} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\vartheta_i(t) - \vartheta(X, t)\right). \tag{10}$$

Da es sich um ein lineares Problem handelt, genügt es, seine Lösung für den Sonderfall zu finden, daß die Innentemperatur $\vartheta_i(t)$ der zur Zeit $t = 0$ einsetzende Einheitssprung ist. Aus dieser Sonderlösung, der sog. Übergangsfunktion $f(x, t)$, gewinnt man die Lösung für beliebigen Temperaturverlauf $\vartheta_i(t)$ durch Überlagern als ein *Duhamel*sches Integral, etwa in der Form [1]

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_{i0}\, f(x, t) + \int_{y\,=\,0}^{t} f(x, t - y)\, \frac{d\vartheta_i(y)}{dy}\, dy\,. \tag{11}$$

[1] Vgl. *K. Zoller*, Ing.-Archiv. 15 (1944) S. 2.

Insbesondere bei dem linearen Temperaturverlauf (1) hat man einfacher

$$\vartheta(x,t) = \begin{cases} \vartheta_{i0} f(x,t) + \dfrac{\vartheta_a}{t_h} \displaystyle\int_0^t f(x,y)\,dy \quad (0 < t < t_h), \\ \vartheta_{i0} f(x,t) + \dfrac{\vartheta_a}{t_h} \displaystyle\int_{t-t_h}^t f(x,y)\,dy \quad (t_h < t)\,. \end{cases} \tag{12}$$

Die Übergangsfunktion $f(x,t)$ ist nun im wesentlichen schon bekannt: Betrachten wir umgekehrt das Temperaturfeld $\Phi(x,t)$ einer sich abkühlenden Platte nach Abb. 4, die zu Beginn gegen ihre Umgebung die Übertemperatur Eins hatte, so ist

$$f(x,t) = 1 - \Phi(x,t)\,. \tag{13}$$

Von der Abkühlungsfunktion $\Phi(x,t)$ ist der zeitliche Verlauf auf den beiden Plattenoberflächen berechnet [1]:

$$\Phi_m = \Phi(0,t)\,, \qquad \Phi_0 = \Phi(X,t)\,. \tag{14}$$

Damit erhält man allgemein für die bezogenen Werte der Temperaturen auf den Rohroberflächen beim Anheizen

$$\left.\begin{aligned} b(t) &= \frac{\vartheta(0,t)}{\vartheta_s} = \frac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\big(1 - \Phi_m(t)\big) + \int_{y=0}^t [1 - \Phi_m(t-y)]\,\frac{d}{dy}\,\frac{\vartheta_i(y)}{\vartheta_s}\,dy\,, \\ c(t) &= \frac{\vartheta(X,t)}{\vartheta_s} = \frac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\big(1 - \Phi_0(t)\big) + \int_{y=0}^t [1 - \Phi_0(t-y)]\,\frac{d}{dy}\,\frac{\vartheta_i(y)}{\vartheta_s}\,dy\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Mit (10) hat man also auch die Steigung

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=X} = \frac{\alpha\,\vartheta_s}{\lambda}\left(\frac{\vartheta_i(t)}{\vartheta_s} - c(t)\right). \tag{16}$$

Für Punkte im Innern der Platte ist dagegen die Reihenentwicklung der Abkühlungsfunktion $\Phi(x,t)$ nicht ausgewertet. Wie man aber zeichnerisch ermittelten Temperaturkurven $\vartheta(x,t)$ für $t =$ konst. entnimmt, läßt sich der Verlauf von $\vartheta(x,t)$ über der Wandkoordinate x bei dünnen Rohrwänden ausreichend genau durch eine Parabel

$$\vartheta(x,t) = \vartheta_s\left(b(t) + A(t)\,\xi^{s(t)}\right) \tag{17}$$

annähern, wenn diese mit der wahren Kurve $\vartheta(x,t)$ in den Randwerten und Randsteigungen (9), (10) für $x = 0$ und $x = X$ übereinstimmt. Dies verlangt

$$A(t) = c - b = \frac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\big(\Phi_m(t) - \Phi_0(t)\big) + \int_{y=0}^t [\Phi_m(t-y) - \Phi_0(t-y)]\,\frac{d}{dy}\,\frac{\vartheta_i(y)}{\vartheta_s}\,dy \tag{18}$$

und

$$s(t) = \frac{\alpha X}{\lambda}\,\frac{\dfrac{\vartheta_i}{\vartheta_s} - c}{c - b} = \frac{\alpha X}{\lambda}\,\frac{\dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\,\Phi_0(t) + \displaystyle\int_{y=0}^t \Phi_0(t-y)\,\frac{d}{dy}\,\frac{\vartheta_i(y)}{\vartheta_s}\,dy}{\dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\big(\Phi_m(t) - \Phi_0(t)\big) + \displaystyle\int_{y=0}^t [\Phi_m(t-y) - \Phi_0(t-y)]\,\frac{d}{dy}\,\frac{\vartheta_i(y)}{\vartheta_s}\,dy} \tag{19}$$

für $b \neq c$. Der Fall $b = c$ kann beim Anheizen, wo $\vartheta(x,t)$ jedenfalls eine monotone Funktion von x ist, nur für $t = 0$ und asymptotisch im stationären Zustand eintreten. Hier ist beidemale $A = 0$, so daß der unbestimmte Wert von s nicht gebraucht wird.

---

[1] Vgl. *H. Gröber* u. *S. Erk*, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, S. 48, Berlin 1933; *G. Pöschl*, Z. angew. Math. Mech. 12 (1932) S. 285 f. — Im folgenden sind die Diagramme von *H. Bachmann*, Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper, Berlin 1938, benützt. Die Bezeichnungen Φ_0, Φ_m sind denen bei *H. Gröber* angeglichen.

Beim linearen Temperaturverlauf ϑ_i (1) hat man

$$A(t) = \begin{cases} \dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\left(\Phi_m(t) - \Phi_0(t)\right) + \dfrac{\vartheta_u}{\vartheta_s t_h}\displaystyle\int_0^t \left(\Phi_m(y) - \Phi_0(y)\right) dy & (0 < t < t_h)\,, \\ \dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\left(\Phi_m(t) - \Phi_0(t)\right) + \dfrac{\vartheta_u}{\vartheta_s t_h}\displaystyle\int_{t-t_h}^t \left(\Phi_m(y) - \Phi_0(y)\right) dy & (t_h < t) \end{cases} \tag{20}$$

und

$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha X}{\lambda} \dfrac{\dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\Phi_0(t) + \dfrac{\vartheta_u}{\vartheta_s t_h}\displaystyle\int_0^t \Phi_0(y)\, dy}{\dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\left(\Phi_m(t) - \Phi_0(t)\right) + \dfrac{\vartheta_u}{\vartheta_s t_h}\displaystyle\int_0^t \left(\Phi_m(y) - \Phi_0(y)\right) dy} & (0 < t < t_h)\,, \\ \dfrac{\alpha X}{\lambda} \dfrac{\dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\Phi_0(t) + \dfrac{\vartheta_u}{\vartheta_s t_h}\displaystyle\int_{t-t_h}^t \Phi_0(y)\, dy}{\dfrac{\vartheta_{i0}}{\vartheta_s}\left(\Phi_m(t) - \Phi_0(t)\right) + \dfrac{\vartheta_u}{\vartheta_s t_h}\displaystyle\int_{t-t_h}^t \left(\Phi_m(y) - \Phi_0(y)\right) dy} & (t_h < t)\,. \end{cases} \tag{21}$$

Damit ist das Temperaturfeld bestimmt und wir wenden uns nun unserer Hauptaufgabe, der Ermittlung der Wärmespannungen zu.

4. Die Wärmespannungen. Da wir uns mit den besonderen Randeinflüssen nicht befassen, versuchen wir, nach Möglichkeit mit einem Spannungs-Verschiebungsfeld auszukommen, bei dem sich der Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$ aus einem Potential [1], dem sog. thermischen Verschiebungspotential Ψ gemäß

$$\mathfrak{u} = \nabla\Psi \tag{22}$$

herleitet. Die Massenträgheit der Teilchen bei ihrer Verschiebung darf man unbedenklich vernachlässigen. Alsdann genügt das Verschiebungspotential der Differentialgleichung

$$\Delta\Psi = \varkappa\,\vartheta(r, t) + C(t) \qquad \text{mit} \qquad \varkappa = \frac{m+1}{m-1}\beta \tag{23}$$

und der Tensor der Wärmespannungen ist

$$\mathfrak{S}_w = 2G\,(\nabla\cdot\nabla - \mathfrak{J}\,\Delta)\,\Psi\,. \tag{24}$$

In diesen Gleichungen ist $\nabla\cdot\nabla$ das dyadische Produkt des Nablaoperators mit sich selber, $\Delta = \nabla^2$ der *Laplace*sche Differentialoperator, $\mathfrak{J}$ der Einheitstensor, G der Schubmodul, m die Querdehnungszahl und β der lineare Ausdehnungskoeffizient. Die Funktion $C(t)$ ist noch den Randbedingungen anzupassen.

In Zylinderkoordinaten r, φ, z ausgedrückt, hängt Ψ aus Symmetriegründen nicht vom Azimut φ ab, so daß sich die Operatoren zu

$$\Delta \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{25}$$

und

$$\nabla\cdot\nabla - \mathfrak{J}\,\Delta \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta & 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial z} \\ 0 & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \Delta & 0 \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial r} & 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta \end{pmatrix} \tag{26}$$

[1] Vgl. *E. Melan* u. *H. Parkus*, Wärmespannungen, S. 7 f., Wien 1953.

vereinfachen. Daraus folgt mit (23), daß die mittlere Zugspannung $\frac{1}{3}(\sigma_{rw} + \sigma_{\varphi w} + \sigma_{zw})$ jedenfalls nicht von der z-Koordinate abhängt. Wir kommen nun zu einer einfachen Näherungslösung, wenn wir dies auch von der Tangentialspannung $\sigma_{\varphi w}$ annehmen; denn dann ist

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r\, \partial z} = 0\,, \tag{27}$$

und man kann mit noch beliebigen Funktionen $g(r, t)$ und $h(z, t)$

$$\Psi = g(r, t) + h(z, t) \tag{28}$$

setzen. Zugleich verschwinden alle Schubspannungen und die Koordinatenrichtungen sind Hauptspannungsrichtungen.

Mit (28) wird aus (23)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\, \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \varkappa\, \vartheta(r, t) + C(t)\,.$$

Diese Gleichung läßt sich mit Hilfe einer noch unbekannten Funktion $D(t)$ in die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\, \frac{\partial g}{\partial r} &= \varkappa\, \vartheta + D\,, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= C - D \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

zerlegen und die Wärmespannungen drücken sich gemäß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_{rw}}{2G} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - C + D\,, \\ \frac{\sigma_{\varphi w}}{2G} &= \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \varkappa\, \vartheta - C\,, \\ \frac{\sigma_{zw}}{2G} &= -\varkappa\, \vartheta - D \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

aus. Sie sind sämtlich von z unabhängig, aber man bemerkt, daß man mit (30) nicht eigentlich die Wärmespannungen in einem von Randeinflüssen freien Rohr gewonnen hat, denn sonst müßte σ_{zw} für die Randquerschnitte identisch in r verschwinden. Wir kommen den gewünschten Verhältnissen aber näher, wenn wir die Funktion $D(t)$ so wählen, daß die Randbedingung $\sigma_{zw} = 0$ wenigstens im Mittel über den Querschnitt erfüllt ist. Man könnte hernach die Randquerschnitte $z =$ konst. des Rohres vollends frei machen, indem man dem gefundenen Spannungsfeld ein weiteres, rein elastostatisches überlagert, bei dem diese Querschnitte durch entsprechende Biegemomente und Schubkräfte belastet sind — eine Aufgabe, die in der Schalentheorie behandelt ist [1]. Diese zusätzlichen Spannungen klingen aber mit wachsender Entfernung vom Rand sehr rasch ab. Außerdem sind wegen der Kesselböden am Rande in Wirklichkeit noch weitere Störungen vorhanden, die wir im voraus vernachlässigt haben. Daher wollen wir auf eine solche Korrektur der Spannungen (30) verzichten und können dies um so eher, als wir nach dem Gesagten erwarten dürfen [2], daß unsere Ergebnisse praktisch brauchbare Zahlenwerte für Querschnitte des Kesselmantels liefern, die nicht zu nahe an den Kesselböden liegen.

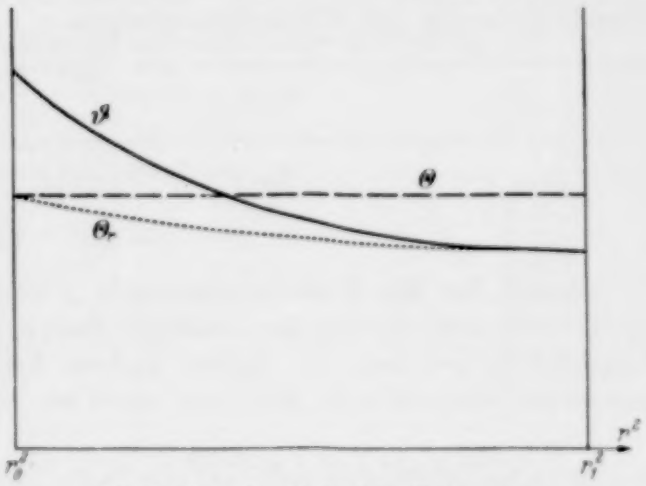

Abb. 5. Typischer Verlauf der Temperaturen im Rohrquerschnitt.

Die Spannung σ_{zw} verschwindet nun im Mittel über einen Querschnitt, wenn wir

$$D = -\varkappa\, \Theta(t) \tag{31}$$

[1] Vgl. etwa *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 1. Bd. S. 513 ff., 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.

[2] S. a. *A.* u. *L. Föppl*, Drang und Zwang, 2. Bd. S. 279, 4. Aufl. München und Berlin 1944.

setzen, wo

$$\Theta(t) = \frac{2}{r_1^2 - r_0^2} \int_{r_0}^{r_1} \vartheta r \, dr = \vartheta_s \left[b + \frac{A}{s+1} - \varepsilon \frac{s A}{2(s+1)(s+2)} + \left(\left(\varepsilon^2\right)\right) \right] \tag{32}$$

das Temperaturmittel über einen Rohrquerschnitt ist. Wir benötigen im folgenden auch noch das Temperaturmittel über einen Teilquerschnitt $r \ldots r_1$

$$\Theta_r(t) = \frac{2}{r_1^2 - r^2} \int_{r}^{r_1} \vartheta r \, dr = \vartheta_s \left[b + \frac{A \xi^s}{s+1} - \varepsilon \frac{s A \xi^{s+1}}{2(s+1)(s+2)} + \left(\left(\varepsilon^2\right)\right) \right]. \tag{33}$$

Bei monotonem Temperaturverlauf ϑ (17) ist stets

$$\Theta_r \leqq \Theta \,. \tag{34}$$

Einmalige Integration der ersten Gleichung (29) gibt mit einer weiteren Funktion $B(t)$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \varkappa \left[\frac{B}{r} + \frac{r_1^2 - r^2}{2r} (\Theta - \Theta_r) \right]. \tag{35}$$

Somit wird nach der ersten Gleichung (30) die Radialspannung allgemein

$$\frac{\sigma_{rw}}{2G} = -\varkappa \left[\frac{B}{r^2} + \frac{r_1^2 - r^2}{2r^2} (\Theta - \Theta_r) + \Theta \right] - C \,. \tag{36}$$

Die Funktionen $B(t)$ und $C(t)$ bestimmt man vollends aus den Randbedingungen $\sigma_{rw}(r_0) = \sigma_{rw}(r_1) = 0$ oder explizit

$$-\varkappa \left(\frac{B}{r_0^2} + \Theta \right) - C = 0 \,,$$

$$-\varkappa \left(\frac{B}{r_1^2} + \Theta \right) - C = 0$$

und erhält

$$B = 0 \,, \qquad C = -\varkappa \Theta \,. \tag{37}$$

Damit kommen die Wärmespannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rw} &= -\varkappa G \frac{r_1^2 - r^2}{r^2} (\Theta - \Theta_r) \leqq 0 \,, \\ \sigma_{\varphi w} &= 2\varkappa G \left[\frac{r_1^2 - r^2}{2r^2} (\Theta - \Theta_r) + (\Theta - \vartheta) \right] \gtrless 0 \,, \\ \sigma_{zw} &= 2\varkappa G (\Theta - \vartheta) \gtrless 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Danach ist die Radialspannung σ_{rw} über den ganzen Querschnitt eine Druckspannung. Sie erweist sich als von der Größenordnung ε und braucht gegenüber $\sigma_{\varphi w}$ und σ_{zw} nicht weiter beachtet zu werden. Die beiden andern Spannungen sind wegen (17) und (32) auf der Rohrinnenseite ebenfalls negativ und zwar ist

$$\sigma_{\varphi w}(r_0) = \sigma_{zw}(r_0) = 2\varkappa G \left(\Theta - \vartheta(r_0, t)\right) = -2\varkappa G \vartheta_s \frac{s A}{s+1} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2(s+2)} + \left(\left(\varepsilon^2\right)\right) \right]. \tag{39}$$

Von diesem Wert aus wachsen sie mit r ständig an und erreichen auf der Rohraußenfläche ihren positiven Größtwert

$$\sigma_{\varphi w}(r_1) = \sigma_{zw}(r_1) = 2\varkappa G \left(\Theta - \vartheta(r_1, t)\right) = 2\varkappa G \vartheta_s \frac{A}{s+1} \left[1 - \frac{\varepsilon s}{2(s+2)} + \left(\left(\varepsilon^2\right)\right) \right]. \tag{40}$$

Zu diesen Spannungen treten noch die vom Innendruck $p_i(\vartheta_i)$ herrührenden Spannungen (3) oder (8). Maßgebend für die Beanspruchung ist also einerseits als größte Druckspannung die resultierende Spannung $\sigma_z(r_0)$, das ist bei dünner Rohrwand ($\varepsilon \ll 1$) näherungsweise der Spannungswert

$$\underline{\sigma} = \frac{p_i - p_a}{2\varepsilon} - \frac{1}{4}(3p_i + p_a) - 2\varkappa G \vartheta_s \frac{s A}{s+1} \,, \tag{41}$$

während die größten Zugspannungen den Wert $\sigma_a = \sigma_{\varphi w}(r_1) + \sigma_{max}$ (4) oder näherungsweise

$$\bar{\sigma} = \frac{p_i - p_a}{\varepsilon} - \frac{1}{2}(p_i + p_a) + 2\varkappa G\,\vartheta_s\,\frac{A}{s+1} \tag{42}$$

nicht übertreffen. Bezüglich $\underline{\sigma}$ wirkt der Innendruck p_i entlastend, hinsichtlich $\bar{\sigma}$ dagegen spannungsvergrößernd.

5. Maximale Heizbelastung. Wir wollen nun die erhaltenen allgemeinen Ergebnisse in einigen Sonderfällen näher diskutieren. Die größten Wärmespannungen treten auf, wenn das kalte Rohr unvermittelt durch ein Dampf–Wassergemisch von der stationären Temperatur ϑ_s beheizt wird. Hier ist nach (20,2) und (21,2) wegen $\vartheta_{i0} = 0$, $\vartheta_a = \vartheta_s$ und $t_h \to 0$

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \Phi_m(t) - \Phi_0(t)\,, \\ s(t) &= \frac{\alpha X}{\lambda}\,\frac{\Phi_0(t)}{\Phi_m(t) - \Phi_0(t)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (t > 0) \tag{43}$$

Berechnet man hieraus die für die Spannungsgrenzwerte $\underline{\sigma}$ und $\bar{\sigma}$ maßgebenden Größen $A/(s+1)$ und $sA/(s+1)$, so findet man in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha X/\lambda$ die Werte von Tabelle 1 für ihren zeitlichen Höchstwert.

Tabelle 1. *Angenäherte Höchstwerte von* $A/(s+1)$ *und* $sA/(s+1)$.

$\frac{\alpha X}{\lambda}$	$\left(\frac{A}{s+1}\right)_{max} \cdot 10^3$	$\left(\frac{sA}{s+1}\right)_{max} \cdot 10^3$
0,2	29,6	55,1
0,5	70,0	128
1	114	214
2	157	316
5	228	463
10	283	571
20	347	666
50	305	767

Für ein Zahlenbeispiel betrachten wir Kesseltrommeln mit $\varepsilon = 0{,}1$, $G = 8{,}1 \cdot 10^5$ kg/cm², $m = 10/3$ und $\beta = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}, dazu ein Dampf–Wassergemisch mit $p_s = 125$ at und $\vartheta_s = 326{,}2°$ C. Hierfür nehmen die Grenzspannungen $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ die Werte nach Tabelle 2 an.

Tabelle 2. *Größte Zug- und Druckspannungen bei sofortiger Heizvollbelastung.*

$\frac{\alpha X}{\lambda}$	$\underline{\sigma}_{[kg/cm^2]}$	$\bar{\sigma}_{[kg/cm^2]}$	$\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 a\,t^*$	$t^*_{[sek]}$
0,2	— 69	1497	0,04	0,05
0,5	— 856	1933	0,1	0,125
1	— 1786	2408	0,3	0,375
2	— 2887	2873	0,5	0,625
5	— 4474	3639	2	2,5
10	— 5641	4233	4	5
20	— 6667	4925	7,5	9,38
50	— 7758	4493	20	25
stationäre Werte	+ 526	1177		

Der Tabelle 2 sind noch zwei weitere Spalten beigefügt, die die Zeit t^* enthalten, zu der der größere der beiden Spannungswerte $|\underline{\sigma}|$ und $\bar{\sigma}$ auftritt. Mit der Temperaturleitzahl a ist hier $(\alpha/\lambda)^2\,a\,t^*$ der bezogene Zeitwert. Die absoluten Zeiten t^* in der letzten Spalte sind daraus berechnet für Werte $\alpha = 10\,000$ kcal/m²h grd, $\lambda = 40$ kcal/m h grd, $a = 0{,}046$ m²/h, also $(\alpha/\lambda)^2\,a = 0{,}80$ sek^{-1}. Hat der Kessel noch eine Wandstärke von $X = 100$ mm, so kommt ihm ein Parameterwert $\alpha X/\lambda = 25$ zu. Für ausgeführte Kesseltrommeln kommen also hauptsächlich Parameterwerte $\alpha X/\lambda$ zwischen 20 und 50 in Betracht. Nach Tabelle 2 würden hier bei sprunghaft einsetzender voller Heizbelastung vor allem auf der Innenseite des Rohrmantels ganz unzulässig große Wärmedruckspannungen auftreten, bei denen zudem das der Rechnung zugrunde gelegte *Hooke*sche Gesetz nicht mehr gilt.

Fragen wir daher umgekehrt, wie hoch bei sofortiger Vollbelastung die Gemischtemperatur ϑ_i höchstens sein darf, damit in einem Kesselmantel mit $\alpha X/\lambda = 20$ der stationäre Spannungs-

höchstwert 1177 kg/cm² von Tabelle 2 nicht überschritten werde, so findet man hierfür aus (41) und (42) $\vartheta_i = 53{,}3°$ C oder, verglichen mit dem gewünschten stationären Wert $\vartheta_s = 326{,}2°$ C, $\vartheta_i/\vartheta_s = 0{,}163$. Daraus folgt, daß man bei allmählichem Anheizen nach Gleichung (1) die Anfangstemperatur ϑ_{i0} nicht wesentlich größer als 0,163 ϑ_s wählen darf, so daß sich die Anheizzeit t_h durch die Wahl von $\vartheta_{i0} \neq 0$ voraussichtlich nicht wesentlich verkürzen lassen wird.

6. Allmähliches Anheizen. Wir gehen nun dazu über, die Wärmespannungen beim Anheizen nach Gleichung (1) an einem Beispiel zu verfolgen und zwar mit denselben Daten wie oben und dem Parameterwert $\alpha X/\lambda = 20$. Als erstes braucht man die für die weitere Rechnung grundlegenden Funktionen[1] Φ_0, $\Phi_m - \Phi_0$ und deren Integrale; sie sind in Abb. 6 über der dimensionslosen Zeitveränderlichen

$$\tau = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 a\, t \tag{44}$$

aufgezeichnet. Unter Berücksichtigung des am Schluß von Ziff. 5 über die Anfangstemperatur ϑ_{i0} Gesagten werten wir das Temperaturgesetz (1) in den drei Fällen $\vartheta_{i0}/\vartheta_s = 0$, 0,1 und 0,2

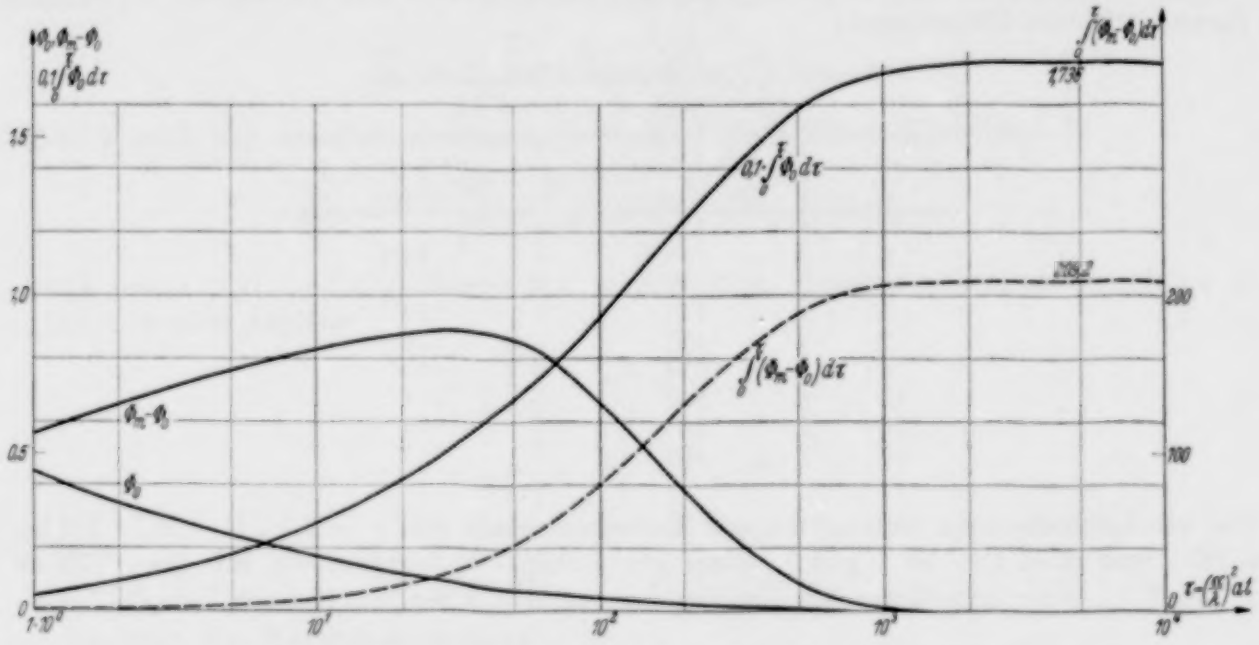

Abb. 6. Die Temperaturfunktionen Φ_0, $\Phi_m - \Phi_0$ und ihre Integrale.

aus und haben dazu noch die Anheizzeit τ_h hinreichend lang zu wählen, damit die Wärmespannungen sich in erträglichen Grenzen halten. Einen Hinweis zur Festlegung von τ_h erhalten wir am ehesten, wenn wir die Formeln (20) und (21) für den einfachsten Fall $\vartheta_{i0} = 0$

$$A(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_h}\displaystyle\int_0^{\tau} \big(\Phi_m(\eta_j) - \Phi_0(\eta_j)\big)\, d\eta_j & (0 < \tau < \tau_h)\,, \\ \dfrac{1}{\tau_h}\displaystyle\int_{\tau-\tau_h}^{\tau} \big(\Phi_m(\eta_j) - \Phi_0(\eta_j)\big)\, d\eta_j & (\tau_h < \tau)\,, \end{cases} \tag{45}$$

$$(\vartheta_{i0} = 0)$$

$$s(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\alpha X}{\lambda}\, \dfrac{\displaystyle\int_0^{\tau} \Phi_0(\eta_j)\, d\eta_j}{\displaystyle\int_0^{\tau} \big(\Phi_m(\eta_j) - \Phi_0(\eta_j)\big)\, d\eta_j} & (0 < \tau < \tau_h)\,, \\ \dfrac{\alpha X}{\lambda}\, \dfrac{\displaystyle\int_{\tau-\tau_h}^{\tau} \Phi_0(\eta_j)\, d\eta_j}{\displaystyle\int_{\tau-\tau_h}^{\tau} \big(\Phi_m(\eta_j) - \Phi_0(\eta_j)\big)\, d\eta_j} & (\tau_h < \tau) \end{cases} \tag{46}$$

[1] S. Fußn. von S. 53.

heranziehen. Danach nimmt die für die Wärmespannungen wichtige Funktion $A(\tau)$ jedenfalls monoton zu im Intervall $0 \ldots \tau_h$. Sie erreicht sogar für τ_h ihren Größtwert, wenn wir τ_h so groß nehmen, daß $\Phi_m(\tau_h) - \Phi_0(\tau_h) \approx 0$ wird. Nach Abb. 6 tritt dies für

$$\tau_h = 3 \cdot 10^3 \tag{47}$$

ein; für $(\alpha/\lambda)^2\, a = 0{,}80\ \text{sek}^{-1}$ entspricht diesem Wert eine Anheizzeit von 1,04 Stunden.

Der zeitliche Verlauf der Grenzspannungen bei der Anheizzeit τ_h (47) ist in Abb. 7 dargestellt. Man bemerkt, daß das Anheizen in zwei Phasen größter Beanspruchung zerfällt. In der ersten Phase handelt es sich um reine Wärmespannungen, während der Innendruck noch nicht in Erscheinung tritt. Hier wird der Kesselmantel am stärksten auf seiner Innenseite auf Druck beansprucht und zwar am ungünstigsten für $\vartheta_{i0} = 0{,}2\,\vartheta_s$. In der zweiten Phase klingen diese Wärmespannungen ab, erzeugen aber zusammen mit dem nun rasch ansteigenden Innendruck einen zweiten Spannungshöchstwert, der für den Wert (47) der Anheizzeit gerade zur Zeit τ_h, für kürzere Anheizzeiten aber erst später erreicht wird.

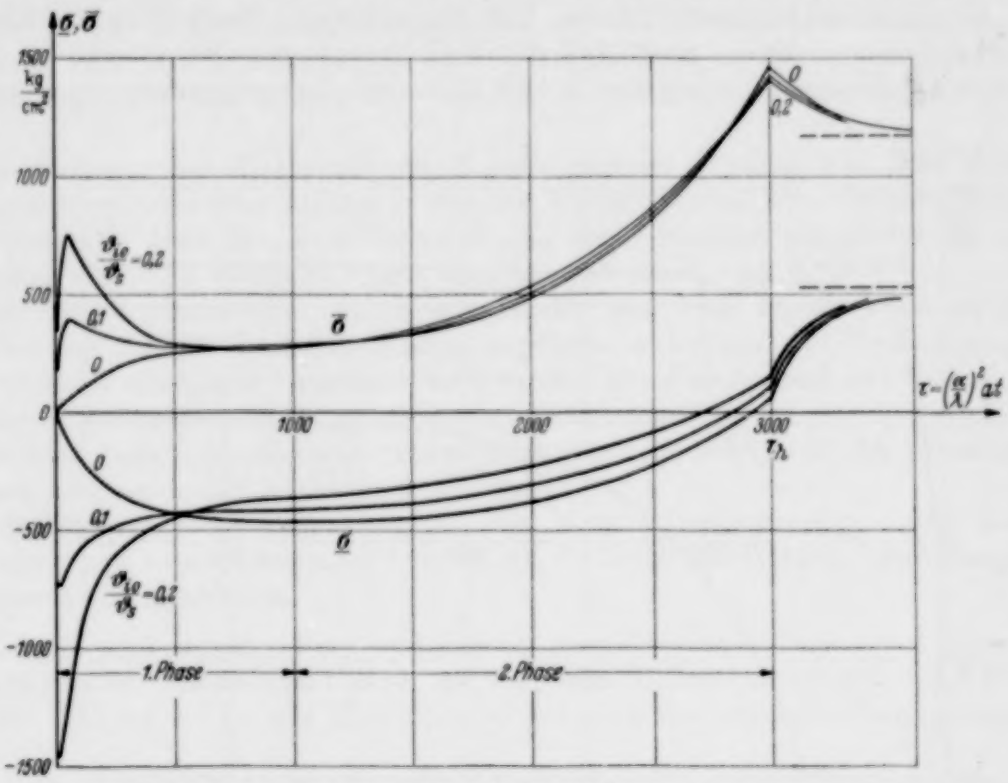

Abb. 7. Wärmespannungen beim Anheizen mit linearem Temperaturanstieg.

Dieser Höchstwert ist in allen drei Heizfällen praktisch derselbe und bedeutet eine unerwünschte Zugbeanspruchung auf der Außenseite des Kesselmantels.

Man überlegt leicht, daß sich dieser zweite Höchstwert durch Abänderung des Temperaturgesetzes beim Anheizen vermeiden läßt. Man braucht nur dafür zu sorgen, daß in der zweiten Phase, in der der Innendruck sich bemerkbar macht, die Änderungsgeschwindigkeit $d\vartheta_i/d\tau$ der Innentemperatur abnimmt, so daß sich hier die eigentlichen Wärmespannungen schneller abbauen. Dafür muß die Innentemperatur in der ersten Phase überlinear ansteigen. Diese Bedingungen erfüllt z. B. ein exponentielles Temperaturgesetz

$$\vartheta_i = \vartheta_s\,(1 - e^{-\omega\tau})\,. \tag{48}$$

Hier bestimmt man ω etwa aus der Bedingung $\vartheta_i(\tau_h) = 0{,}999\,\vartheta_s$ zum Werte $\omega = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$. Ausgehend von den Gleichungen (18) und (19), die für das Gesetz (48)

$$\left.\begin{aligned} A(\tau) &= \omega\, e^{-\omega\tau} \int_0^\tau \left(\Phi_m(\eta) - \Phi_0(\eta)\right) e^{\omega\eta}\, d\eta\,, \\ s(\tau) &= \frac{\alpha X}{\lambda} \frac{\int_0^\tau \Phi_0(\eta)\, e^{\omega\eta}\, d\eta}{\int_0^\tau \left(\Phi_m(\eta) - \Phi_0(\eta)\right) e^{\omega\eta}\, d\eta} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

lauten, erhält man Spannungsgrenzwerte $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ nach Abb. 8. Wie gewünscht, gibt es jetzt nur noch einen extremen Spannungswert und zwar eine Druckspannung auf der Innenseite des Rohrmantels.

7. Ergänzende Bemerkungen zum Lösungsverfahren. Das zur Berechnung der Wärmespannungen nötige Temperaturfeld in der Rohrwand wird bei vorstehendem Verfahren mit Hilfe der Übergangsfunktion ermittelt. Diese selber wird auf die im wesentlichen schon bekannte *Gröber*sche Abkühlungsfunktion zurückgeführt. Das letzte ist nicht mehr möglich,

wenn zu einem Kesselmantel der Parameterwert $\varkappa\, X/\lambda > 50$ ist, oder wenn man den Einfluß der Wandkrümmung auf das Temperaturfeld berücksichtigen will, oder wenn die Randbedingungen für die Wärmeübertragung von allgemeinerer Art sind, also z. B. wenn man die Wärmeverluste auf der Außenseite des Kessels nicht vernachlässigen darf. In solchen Fällen muß man die Übergangsfunktion neu berechnen, was verhältnismäßig mühelos und wohl genügend genau mit dem zeichnerischen Verfahren von *E. Schmidt*[1] gelingt. Man bildet dann die Mittelwerte (32) und (33) unter Verzicht auf die Näherungsparabel (17) zweckmäßig zunächst aus der Übergangsfunktion und bestimmt erst daraus durch Vertauschung der Integrationen in (11) und (32) oder (33) die mittleren Temperaturen Θ und Θ_r. Solange die Randbedingungen derart sind, daß die Wandtemperatur für $t = \text{konst.}$ monoton verläuft, bleiben für die Beanspruchung der Wand allein die Grenzspannungen $\underline{\sigma}$ und $\bar{\sigma}$ maßgebend, nur sind die Formeln (41), (42) für sie nicht mehr anwendbar, sondern man erhält jetzt $\underline{\sigma}$ und $\bar{\sigma}$ aus den allgemeineren Formeln (39) und (40), die durch die Innendruckspannungen zu ergänzen sind. Im übrigen wird man zur Lösung immer dann die Übergangsfunktion heranziehen, wenn man verschiedene Temperaturgesetze systematisch prüfen will. Handelt es sich aber nur darum, die Wärmespannungen in einem einzigen, genau festgelegten Sonderfall zu ermitteln, dann bestimmt man das Temperaturfeld besser unmittelbar, etwa wieder mit dem *Schmidt*schen Verfahren.

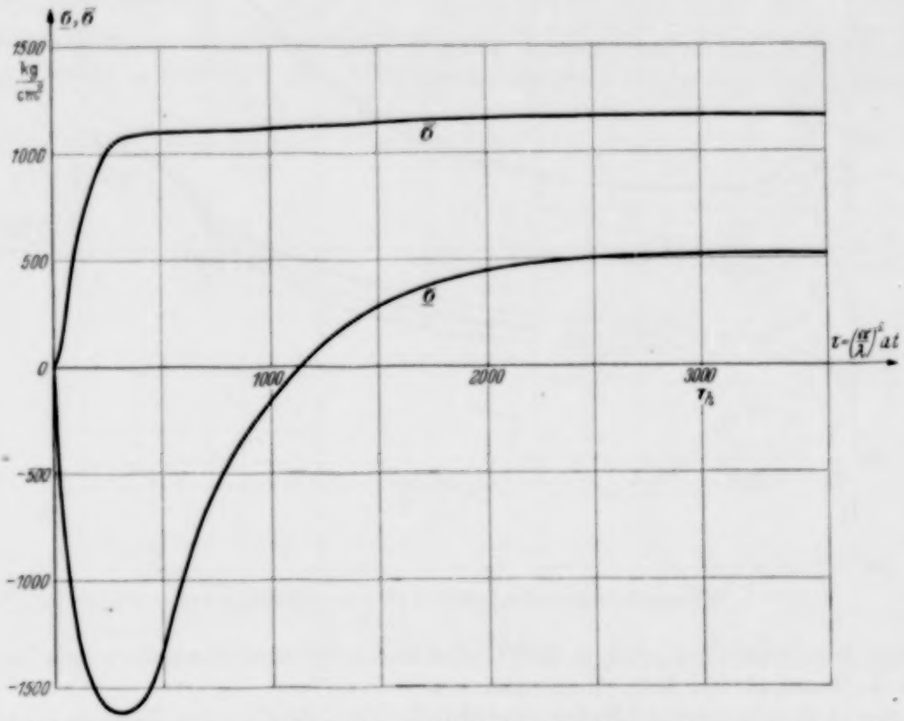

Abb. 8. Wärmespannungen beim Anheizen mit exponentiell abklingendem Temperaturanstieg.

8. Zusammenfassung. Eine Kesseltrommel, dis stationär durch ein Dampf-Wassergemisch von hohem Druck und hoher Temperatur im wesentlichen durch den Innendruck beansprucht wird, darf in kaltem Zustand nicht sofort mit diesem Gemisch beschickt werden, da sie sonst durch Wärmespannungen zerstört werden kann. Man muß daher die Belastung der Trommel allmählich während einer hinreichend großen Anheizzeit steigern. Sehr lange Anheizzeiten setzen zwar die Wärmespannungen beliebig stark herab, sind aber unwirtschaftlich. Die Kürze der Anheizzeit hängt von der Größe der zugelassenen Spannungshöchstwerte ab. Bei der Verwickeltheit der Gleichungen lassen sich hierfür keine expliziten Formeln angeben, doch können die Wärmespannungen in jedem einzelnen Falle durch verhältnismäßig einfache Rechnungen, die über Quadraturen nicht hinausgehen, ermittelt werden, sofern man fürs erste von den besonderen Randeinflüssen an den Kesselböden absieht. Es ist für die Beanspruchung des Kesselmantels günstiger, beim Anheizen die Innentemperatur nicht etwa linear, sondern exponentiell abklingend auf ihren stationären Wert ansteigen zu lassen. Vermutlich ließen sich die Anheizzeiten noch weiter verkürzen, wenn man das Anheizverfahren selbst abändern könnte, derart, daß hierbei die Wärme auch über die Außenoberfläche des Kessels, etwa auf elektrischem Wege, zugeführt würde.

(Eingegangen am 12. März 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Konrad Zoller*, Stuttgart-Sillenbuch, Kirchheimer Str. 21.

[1] Vgl. *E. Schmidt*, Einführung in die technische Thermodynamik, S. 344ff., 4. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

Über eine Anwendung der *Hill*schen Minimalbedingung in der Plastizitätstheorie*.

Von H. Jung.

1. Einleitung. Entsprechend den Minimalbedingungen in der Elastizitätstheorie hat *R. Hill* [1] Minimalbedingungen für den elastisch plastischen Körper aufgestellt. Eine Anwendung dieser Minimalbedingungen zur Gewinnung von Lösungen wurde, soweit mir bekannt ist, noch nicht gegeben.

Im folgenden soll am Beispiel des dickwandigen Rohres gezeigt werden, wie mit Hilfe dieser Minimalbedingungen eine Näherungslösung gewonnen werden kann. Eine ausführliche Darstellung mit Literaturangabe über den derzeitigen Stand der Untersuchungen für dieses technisch so außerordentlich wichtige Problem findet man in dem Buch von *R. Hill* [2].

In Ziff. 2 werden die Grundgleichungen zusammengestellt und eine bisher noch nicht bekannte Differentialgleichung für die Radialspannung gegeben, wobei für die Verfestigung des Materials das Gesetz von *Rös-Eichinger* [3] angenommen wurde. Die Anwendung der Minimalbedingungen zur Verbesserung der in Ziff. 2 gewonnenen Näherungslösungen wird dann in Ziff. 3 gezeigt. Ziff. 4 gibt eine Zusammenfassung und einen kurzen Bericht über die Übereinstimmung der gewonnenen Lösungen mit Versuchsergebnissen.

Die Annahme, daß im vorliegenden Belastungsfall die Materialverfestigung durch das Gesetz von *Rös-Eichinger* gegeben werden kann, ist berechtigt, da bei der Belastung Spannungstensor und Dehnungstensor koaxial bleiben.

2. Aufstellung der Grundgleichungen. Ein beiderseitig geschlossenes Rohr wird durch einen Innendruck p_i beansprucht. Bezeichnet man mit $2\,r_a$ den Außendurchmesser und $2\,r_i$ den Innendurchmesser des Rohres, so ist der Innendruck, bei dem das gesamte Rohr gerade noch elastisch bleibt,

$$p_0 = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2}\right). \tag{1}$$

Gleichung (1) ergibt sich aus den bekannten Beziehungen der Elastizitätstheorie, wenn man fordert, daß für $r = r_i$ die v. *Mises*sche Plastizitätsbedingung

$$\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \sqrt{2}\,\sigma_p \tag{2}$$

gerade erfüllt ist und im Rohr keine Schubspannungen auftreten. Die Radialspannung σ_r, die Tangentialspannung σ_φ und die Axialspannung σ_z sind damit Hauptspannungen.

Überschreitet der Innendruck den durch (1) gegebenen Wert, so wird das Rohr bleibend deformiert, wobei sich eine plastische Zone von innen nach außen ausbreitet. Bezeichnet man mit ϱ den Halbmesser des Zylinders, der den plastischen vom elastischen Bereich trennt, so gilt für den elastischen Bereich $\varrho \leqq r \leqq r_a$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\,C\left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1\right), \qquad \sigma_\varphi = C\left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1\right), \qquad \sigma_z = E\,\varepsilon_{z\,El} + 2\,\nu\,C\,, \\ u &= -\,\nu\,\varepsilon_{z\,El}\,r + \frac{1+\nu}{E}\,C\left[(1-2\,\nu)\,r + \frac{r_a^2}{r}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In (3) ist $\nu = \frac{1}{m}$ die Querdehnungszahl, E der Elastizitätsmodul, $\varepsilon_{z\,El} = \frac{\partial w}{\partial z}$ die konstante Axialdehnung im elastischen Bereich, u die Radialverschiebung und C eine Konstante, die sich aus der Plastizitätsbedingung (2) bestimmen läßt.

Für den plastischen Bereich $r_i \leqq r \leqq \varrho$ gilt nach *Prandtl-Reuß* [4] das Gleichungssystem, das die Spannungszuwächse mit den Dehnungszuwächsen verknüpft, wenn der Innendruck um

* Meinem Lehrer Herrn Prof. Dr. Dr. *R. Grammel* zum 65. Geburtstag gewidmet.

[1] *R. Hill*, The mathematical Theory of Plasticity, S. 60—69. Oxford 1950.

[2] *R. Hill*, a. a. O. (Fußnote 1) S. 106 f.

[3] *M. Rös* und *A. Eichinger*, Metalle, Diskussionsbericht No. 34 der Eidgenöss. Materialprüf. Anst. Zürich 1929.

[4] *A. Reuss*, Z. angw. Math. Mech. 10 (1930) 266.

dp_i anwächst:

$$d\varepsilon_r = \frac{1}{E} d\,[\sigma_r - \nu\,(\sigma_\varphi + \sigma_z)] + (\sigma_r - \sigma_0)\,d\lambda\,,$$

$$d\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} d\,[\sigma_\varphi - \nu\,(\sigma_z + \sigma_r)] + (\sigma_\varphi - \sigma_0)\,d\lambda\,,$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E} d\,[\sigma_z - \nu\,(\sigma_\varphi + \sigma_r)] + (\sigma_z - \sigma_0)\,d\lambda\,,$$

wobei

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)$$

der hydrostatische Spannungszustand und $d\lambda$ eine vom Material, der Beanspruchungsart und der Vorgeschichte abhängige Funktion ist.

Führt man die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2}\,, \\ \bar{\varepsilon} &= \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ein, so gilt nach *Rös-Eichinger*[1] für $\bar{\sigma} > \sqrt{2}\,\sigma_p$

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})\,. \tag{6}$$

Entwickelt man die im Verfestigungsgesetz (6) auftretende Funktion $f(\bar{\varepsilon})$ in eine Potenzreihe nach $\bar{\varepsilon}$, so geht (6) bei Annahme einer linearen Verfestigung über in

$$\bar{\sigma} = \sqrt{2}\,\tau_0 + \alpha\,\bar{\varepsilon}\,. \tag{7}$$

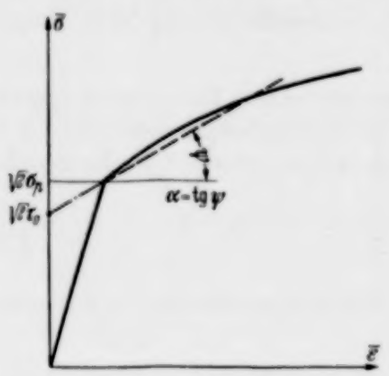

Abb. 1. Verfestfunktion.

Wie aus Abb. 1 hervorgeht, ist $\tau_0 < \sigma_p$ für $\alpha > 0$, und für $\alpha = 0$ wird $\tau_0 = \sigma_p$.

Steigert man den Innendruck um dp_i, so wandert die Plastizitätsgrenze ϱ um $d\varrho$ nach außen. Man definiert nun eine Deformationsgeschwindigkeit durch den Ansatz

$$v = \frac{du}{d\varrho} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}}{1 - \dfrac{\partial u}{\partial r}}\,. \tag{8}$$

Mit (8) ist

$$\frac{d}{d\varrho} = \frac{\partial}{\partial \varrho} + v\,\frac{\partial}{\partial r}\,. \tag{9}$$

Beschränkt man sich auf kleine Verschiebungen, so ist $\dfrac{\partial u}{\partial r} \ll 1$ und damit

$$v = \frac{\partial u}{\partial \varrho} \ll 1\,. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (10) wird

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\varrho} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varrho}\,, \qquad \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\varrho} = \frac{1}{r}\,v = \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varrho}\,, \qquad \frac{d\varepsilon_z}{d\varrho} = \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \varrho} + v\,\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \varrho}\,. \tag{11}$$

Addiert man die drei Gleichungen (4), so wird mit (11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varrho} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \varrho} = \frac{1 - 2\,\nu}{E}\,\frac{d}{d\varrho}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)\,. \tag{12}$$

Macht man nun für σ_z den Ansatz

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \Phi(r, \varrho)\,, \tag{13}$$

so geht mit (13) die dritte Gleichung (4) über in

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varrho} = \frac{1 - 2\,\nu}{2\,E}\,\frac{d}{d\varrho}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{E}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{2}{3}\,\Phi\,\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho}\,. \tag{14}$$

[1] Siehe Fußnote 3 von Seite 61.

Ebenso erhält man mit (13) aus (12)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varrho}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varrho}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \varrho}=\frac{3}{2}\,\frac{1-2\nu}{E}\,\frac{d}{d\varrho}\left(\sigma_r+\sigma_\varphi\right)+\frac{1-2\nu}{E}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\,. \tag{15}$$

Vernachlässigt man, um eine erste Näherungslösung zu erhalten, in (14) und (15) die Glieder mit $\Phi(r,\varrho)$, so erhält man aus (14) und (15) die Radialverschiebung

$$u=\frac{1-2\nu}{E\,r}\int\left[\sigma_r+\sigma_\varphi\right]r\,dr+\frac{c_1}{r}\,. \tag{16}$$

Mit (16) wird

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=-\frac{1-2\nu}{E\,r^2}\int\left[\sigma_r+\sigma_\varphi\right]r\,dr-\frac{c_1}{r^2}+\frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_r+\sigma_\varphi\right),\\ \varepsilon_\varphi&=\frac{1-2\nu}{E\,r^2}\int\left[\sigma_r+\sigma_\varphi\right]r\,dr+\frac{c_1}{r^2}\,.\end{aligned}\right| \tag{17}$$

Aus (14) und (17) ergibt sich, daß im Rahmen dieser Näherung

$$\varepsilon_z=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi\right) \tag{18}$$

ist. Geht man mit (13) und (18) in (5) ein, dann wird

$$\sigma=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sigma_\varphi-\sigma_r\right),\qquad \bar{\varepsilon}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\varepsilon_\varphi-\varepsilon_r\right). \tag{19}$$

Gleichung (7) nimmt mit (19) die Form an

$$\left(\sigma_\varphi-\sigma_r\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\tau_0+\alpha\left(\varepsilon_\varphi-\varepsilon_r\right). \tag{20}$$

Setzt man (17) in (20) ein, so kommt

$$\sigma_\varphi-\sigma_r=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\tau_0+\alpha\left[2\,\frac{1-2\nu}{E\,r^2}\int\left(\sigma_r+\sigma_\varphi\right)r\,dr+\frac{2\,c_1}{r^2}-\frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_r+\sigma_\varphi\right)\right]. \tag{21}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0\,,\qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \tag{22}$$

folgt

$$\sigma_\varphi=r\,\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\sigma_r\,. \tag{22a}$$

Geht man mit (22a) in (21) ein, so erhält man die Differentialgleichung für σ_r

$$\frac{d}{dr}\left(r^3\,\frac{d\sigma_r}{dr}\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{\tau_0\,E}{E+\alpha\,(1-2\nu)}\,r=0\,. \tag{23}$$

Mit der Abkürzung

$$\varkappa_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\tau_0\,E}{E+\alpha\,(1-2\nu)}$$

erhält man aus (23)

$$\sigma_r=\varkappa_0\ln r+\frac{c_2}{2\,r^2}-c_3\,,\qquad \sigma_\varphi=\varkappa_0\,(1+\ln r)-\frac{c_2}{2\,r^2}-c_3\,. \tag{24}$$

Die in (24) auftretenden Konstanten lassen sich aus den Randbedingungen

$$r=\varrho\,,\qquad \sigma_{r\,Pl}=\sigma_{r\,El}\,,\qquad \sigma_{\varphi\,Pl}=\sigma_{\varphi\,El} \tag{25}$$

bestimmen. Unter Verwendung von (19) geht die Plastizitätsbedingung (2) über in

$$\sigma_\varphi-\sigma_r=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma_p\,. \tag{26}$$

Geht man mit (3) in (26) ein, so läßt sich die Konstante C bestimmen. Die Spannungen im elastischen Bereich sind damit

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho^2}{r_a^2}\left(\frac{r_a^2}{r^2}-1\right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho^2}{r_a^2}\left(\frac{r_a^2}{r^2}+1\right), \\ \sigma_z &= E\cdot\varepsilon_{z\,El}+2\,\nu\,\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho^2}{r_a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Erfüllt man die Randbedingungen (25), so wird für den plastischen Bereich

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\varkappa_0\ln\frac{\varrho}{r}-\varkappa_0\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho^2}{r_a^2}\left(1-\frac{r_a^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\varphi &= -\varkappa_0\ln\frac{\varrho}{r}+\frac{\varkappa_0}{2}\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho^2}{r_a^2}\left(1+\frac{r_a^2}{r^2}\right), \\ \sigma_z &= -\varkappa_0\ln\frac{\varrho}{r}+\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho^2}{r_a^2}+\Phi(r,\varrho). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Setzt man in (28) $\varkappa=0$, so gehen die Ausdrücke für σ_r und σ_φ in die bekannten Gleichungen für das dickwandige Rohr ohne Verfestigung über. Bildet man mit (28) die $d\sigma_i\,(i=r,\varphi,z)$, so befriedigen auch diese Spannungszuwächse die Gleichgewichtsbedingungen. Außerdem wird die „Spannungsrandbedingung"

$$d\sigma_{r\,Pl}=d\sigma_{r\,El} \tag{29}$$

auf dem Rand $r=\varrho$ erfüllt. Das Gleichungssystem (28) ist damit ein zulässiges System zur Erfüllung der *Hill*schen Minimalbedingung [1]

$$\int_{r_i}^{\varrho}\left(d\sigma_r\cdot d\overset{\varkappa}{\varepsilon}_r+d\sigma_\varphi\cdot d\overset{\varkappa}{\varepsilon}_\varphi+d\sigma_z\cdot d\overset{\varkappa}{\varepsilon}_z\right)r\,dr=\text{Min}. \tag{30}$$

Die Minimalbedingung (3) soll zur Bestimmung der Funktion Φ herangezogen werden. Hierbei ist zu beachten, daß die in (30) auftretenden Dehnungszuwächse $d\overset{\varkappa}{\varepsilon}_i\,(i=r,\varphi,z)$ nicht aus einem Verschiebungssystem u, w ermittelt werden, sondern durch die Spannungen über die Gleichungen (4) bestimmt sind.

3. Anwendung der Minimalbedingung. Aus (28) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_r}{\partial\varrho} &= -\frac{\varkappa_0}{\varrho}\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{2\,\varrho}{r_a^2}\left(1-\frac{r_a^2}{r^2}\right), \\ \frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varrho} &= -\frac{\varkappa_0}{\varrho}\left(1+\frac{\varrho^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{2\,\varrho}{r_a^2}\left(1+\frac{r_a^2}{r^2}\right), \\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial\varrho} &= -\frac{\varkappa_0}{\varrho}+\frac{2\,\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho}{r_a^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Mit (20) wird die in (4) auftretende Funktion $d\lambda$

$$d\lambda=\frac{E-\alpha\,(1+\nu)}{\alpha\,E}\,\frac{d\sigma_\varphi-d\sigma_r}{\sigma_\varphi-\sigma_r}=\frac{2\,\varkappa_1\,\varkappa_2}{\varrho\left(\dfrac{r^2}{\varrho^2}+\varkappa_2\right)}, \tag{32}$$

wobei $\varkappa_1=\dfrac{E-\alpha\,(1+\nu)}{\alpha\,E}$, $\varkappa_2=\dfrac{2\,\sigma_p}{\sqrt{3}\,\varkappa_0}-1$ ist.

Man setzt (28), (31) und (32) in (4) ein und erhält

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_r}{\partial\varrho} &= \frac{\nu+1}{E}\left[\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{2\,\varrho}{r_a^2}\left(1-\frac{r_a^2}{r^2}\right)-\frac{\varkappa_0}{\varrho}\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)-\frac{\nu}{\nu+1}\left(\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{2\,\varrho}{r_a^2}\right.\right. \\ &\quad\left.\left.-\frac{\varkappa_0}{\varrho}+\frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right)\right]-\frac{2\,\varkappa_1\,\varkappa_2}{\dfrac{r^2}{\varrho^2}+\varkappa_2}\left[\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\frac{\varrho}{r_a^2}+\frac{\varkappa_0}{2\,\varrho}\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)+\frac{\Phi}{3\,\varrho}\right], \end{aligned}\right\}$$

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 61.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_\varphi}{d\varrho} &= \frac{\nu+1}{E}\left[\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{2\,\varrho}{r_a^2}\left(1+\frac{r_a^2}{r^2}\right)-\frac{\varkappa_0}{\varrho}\left(1+\frac{\varrho^2}{r^2}\right)-\frac{\nu}{\nu+1}\left(\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{2\,\varrho}{r_a^2}\right.\right.\\ &\quad\left.\left.-\frac{\varkappa_0}{\varrho}+\frac{1}{3}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right)\right]+\frac{2\,\varkappa_1\,\varkappa_2}{\dfrac{r^2}{\varrho^2}+\varkappa_2}\left[\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho}{r_a^2}+\frac{\varkappa_0}{2\,\varrho}\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)-\frac{\Phi}{3\,\varrho}\right],\\ \frac{d\varepsilon_z}{d\varrho} &= \frac{1}{E}\left(\frac{2\,\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho}{r_a^2}-\frac{\varkappa_0}{\varrho}\right)+\frac{2\,\nu+3}{3\,E}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}+\frac{4}{3}\,\frac{\Phi}{\varrho}\,\frac{\varkappa_1\,\varkappa_2}{\dfrac{r^2}{\varrho^2}+\varkappa_2}.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Geht man mit (31) und (33) in (30) ein, so geht die Minimalbedingung über in

$$J+\frac{2}{E}\int_{r_i}^{\varrho}\left[\left(\frac{2\,\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho}{r_a^2}-\frac{\varkappa_0}{\varrho}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}+\frac{2}{3}\,\frac{E\,\varkappa_1\,\varkappa_2}{\dfrac{r^2}{\varrho^2}+\varkappa_2}\,\frac{\Phi}{\varrho}\right)+(4\,\nu+6)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right)^2+\frac{2}{3}\,\frac{\varkappa_1\,\varkappa_2}{\dfrac{r^2}{\varrho^2}+\varkappa_2}\,\frac{\Phi}{\varrho}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right]r\,dr=\text{Min}\,, \tag{34}$$

wobei J eine Konstante ist. Aus der Gleichgewichtsbedingung in Achsrichtung erhält man eine Nebenbedingung für die Funktion Φ.

Der dem Halbmesser ϱ zugeordnete Innendruck ist

$$p_i=\varkappa_0\ln\frac{\varrho}{r_i}+\frac{\varkappa_0}{2}\left(1-\frac{\varrho^2}{r_i^2}\right)-\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho^2}{r_a^2}\left(1-\frac{r_a^2}{r_i^2}\right). \tag{35}$$

Mit (35) wird der auf das Rohr ausgeübte Axialzug

$$A=\pi\,r_i^2\left[\varkappa_0\ln\frac{\varrho}{r_i}+\frac{\varkappa_0}{2}\left(1-\frac{\varrho^2}{r_i^2}\right)-\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho^2}{r_a^2}\left(1-\frac{r_a^2}{r_i^2}\right)\right]. \tag{36}$$

Die Gleichgewichtsbedingung in Achsrichtung führt auf

$$E\,\varepsilon_{z\,El}-(1-2\,\nu)\,\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho^2}{r_a^2}+\frac{2}{r_a^2-\varrho^2}\int_{r_i}^{\varrho}\Phi(r,\varrho)\,r\,dr=0\,. \tag{37}$$

Für $r=\varrho$ müssen die Spannungsrandbedingungen

$$\sigma_{z\,El}=\sigma_{z\,Pl}\,, \tag{38}$$

$$\frac{d\sigma_{z\,El}}{d\varrho}=\frac{d\sigma_{z\,Pl}}{d\varrho} \tag{39}$$

erfüllt werden. Die Randbedingung (38) ergibt

$$\Phi(\varrho\,\varrho)=E\,\varepsilon_{z\,El}-(1-2\,\nu)\,\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho^2}{r_a^2}. \tag{40}$$

Aus (37) und (40) kommt

$$\Phi(\varrho\,\varrho)+\frac{2}{r_a^2-\varrho^2}\int_{r_i}^{\varrho}\Phi(r,\varrho)\,r\,dr=0\,. \tag{41}$$

Mit der letzten Gleichung aus (33) und der Forderung, daß für $r=\varrho$

$$d\varepsilon_{z\,El}=d\varepsilon_{z\,Pl}$$

erfüllt ist, führt die Randbedingung (39) auf

$$\frac{2\,\nu}{3}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right]_{r=\varrho}+\frac{4}{3}\,\frac{E\,\varkappa_1\,\varkappa_2}{1+\varkappa_2}\left[\frac{\Phi}{\varrho}\right]_{r=\varrho}+4\,\nu\,\frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}\,\frac{\varrho}{r_a^2}=0\,. \tag{42}$$

Bei einer rein elastischen Deformation ist

$$\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\varphi)\,. \tag{43}$$

Damit ergibt (43) die Anfangsbedingung

$$\Phi(r,r_i)\equiv 0\quad\text{für}\quad\varrho=r_i\,. \tag{44}$$

Durch den Ansatz für die Funktion

$$\Phi(r, \varrho) = (\varrho^2 - r_i^2)\left[c_0 + c_1 \frac{r}{\varrho} + c_2 \frac{r^2}{\varrho^2}\right] \tag{45}$$

wird (44) erfüllt. Die Konstante c_0 in (45) läßt sich so bestimmen, daß (41) erfüllt wird. Es ist dann

$$\Phi(r, \varrho) = c_1 (\varrho^2 - r_i^2)\left(\frac{r}{\varrho} - \frac{r_a^2 - \frac{2}{3}\frac{r_i^3}{\varrho} - \frac{1}{3}\varrho^2}{r_a^2 - r_i^2}\right) + c_2 (\varrho^2 - r_i^2)\left(\frac{r^2}{\varrho^2} - \frac{r_a^2 - \frac{1}{2}\frac{r_i^4}{\varrho^2} - \frac{1}{2}\varrho^2}{r_a^2 - r_i^2}\right). \tag{46}$$

Setzt man (46) in (42) ein, und beachtet, daß c_1 und c_2 noch Funktionen von ϱ sind, so erhält man die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \nu \frac{4\sigma_p}{\sqrt{3}} \frac{\varrho}{r_a^2} = {} & \left(r_i^2 - \frac{2}{3}\frac{r_i^3}{\varrho} - \frac{1}{3}\varrho^2\right)\frac{2\nu}{3}\frac{\varrho^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial \varrho} + \frac{2 c_1 \varrho}{\varrho^2 - r_i^2} + \frac{2}{\nu}\frac{E \varkappa_1 \varkappa_2}{1 + \varkappa_2}\frac{c_1}{\varrho}\right) \\ & + \frac{2}{3}\nu c_1 \frac{\varrho^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(\frac{r_a^2}{\varrho} - \frac{r_i^2}{\varrho} + \frac{2}{3}\frac{r_i^3}{\varrho} - \frac{2}{3}\varrho\right) \\ & + \left(r_i^2 - \frac{1}{2}\frac{r_i^4}{\varrho^2} - \frac{1}{2}\varrho^2\right)\frac{2\nu}{3}\frac{\varrho^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(\frac{\partial c_2}{\partial \varrho} + c_2 \frac{2\varrho}{\varrho^2 - r_i^2} + \frac{2}{\nu}\frac{E \varkappa_1 \varkappa_2}{1 + \varkappa_2}\frac{c_2}{\varrho}\right) \\ & + \frac{2}{3}\nu c_2 \frac{\varrho^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(\frac{2 r_a^2}{\varrho} - \frac{2 r_i^2}{\varrho} + \frac{r_i^4}{\varrho^3} - \varrho\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Führt man die Abkürzungen

$$\mu_1 = \frac{r_a^2 - \frac{2}{3}\frac{r_i^3}{\varrho} - \frac{1}{3}\varrho^2}{r_a^2 - r_i^2}, \qquad \mu_2 = \frac{r_a^2 - \frac{1}{2}\frac{r_i^4}{\varrho^2} - \frac{1}{2}\varrho^2}{r_a^2 - r_i^2}, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial c_1}{\partial \varrho}(\varrho^2 - r_i^2) + 2\varrho c_1 - (\varrho^2 - r_i^2)\frac{c_1}{\varrho}, \\ F_2 &= \frac{\partial c_2}{\partial \varrho}(\varrho^2 - r_i^2) + 2\varrho c_2 - (\varrho^2 - r_i^2)\frac{2 c_2}{\varrho}, \\ F_3 &= \frac{\partial c_1}{\partial \varrho}\mu_1(\varrho^2 - r_i^2) + 2\varrho c_1 \mu_1 - (\varrho^2 - r_i^2) c_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial \varrho}, \\ F_4 &= \frac{\partial c_2}{\partial \varrho}\mu_2(\varrho^2 - r_i^2) + 2\varrho c_2 \mu_2 - (\varrho^2 - r_i^2) c_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial \varrho}, \\ F_5 &= c_1 \int_{r_i}^{\varrho} \frac{\frac{r}{\varrho} - \mu_1}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2}\frac{r}{\varrho}\,dr, \qquad F_6 = c_2 \int_{r_i}^{\varrho} \frac{\frac{r^2}{\varrho^2} - \mu_2}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2}\frac{r}{\varrho}\,dr \end{aligned} \tag{49}$$

ein, so ist

$$\int_{r_i}^{\varrho}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{2}{3}\frac{E \varkappa_1 \varkappa_2}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2}\frac{\Phi}{\varrho}\right) r\,dr = \frac{\varrho^3 - r_i^3}{3\varrho} F_1 + \frac{\varrho^4 - r_i^4}{4\varrho^2} F_2 - \frac{\varrho^2 - r_i^2}{2}(F_3 + F_4) + \frac{2}{3} E \varkappa_1 \varkappa_2 (\varrho^2 - r_i^2)(F_5 + F_6). \tag{50}$$

$$\int_{r}^{\varrho}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right)^2 r\,dr = \frac{\varrho^2 - r_i^2}{2}(F_3 + F_4)^2 - \frac{2}{3}\frac{\varrho^3 - r_i^3}{\varrho}(F_1 F_3 + F_1 F_4) + \frac{\varrho^4 - r_i^4}{4\varrho^2}[F_1^2 - 2 F_2 F_3 - 2 F_2 F_4] + \frac{2}{5}\frac{\varrho^5 - r_i^5}{5\varrho^3} F_1 F_2 + \frac{\varrho^6 - r_i^6}{6\varrho^4} F_2^2, \tag{51}$$

$$\frac{2}{3} E \varkappa_1 \varkappa_2 \int_{r_i}^{\varrho} \frac{\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2} \frac{r}{\varrho} dr = \frac{2}{3} E \varkappa_1 \varkappa_2 (\varrho^2 - r_i^2) \Bigg\{ (c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2)(F_3 + F_4)$$
$$\times \int_{r_i}^{\varrho} \frac{1}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2} \frac{r}{\varrho} dr - [F_1 (c_1 \mu_1 - c_2 \mu_2) + c_1 (F_3 + F_4)] \int_{r_i}^{\varrho} \frac{1}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2} \frac{r^2}{\varrho^2} dr$$
$$- [F_2 (c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2) - F_1 C_1 + (F_3 + F_4) c_2] \int_{r_i}^{\varrho} \frac{1}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2} \frac{r^3}{\varrho^3} dr$$
$$+ [F_1 c_2 + F_2 c_1] \int_{r_i}^{\varrho} \frac{1}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2} \frac{r^4}{\varrho^4} dr + c_2 F_2 \int_{r_i}^{\varrho} \frac{1}{\frac{r^2}{\varrho^2} + \varkappa_2} \frac{r^5}{\varrho^5} dr \Bigg\} . \tag{52}$$

Die Minimalbedingung lautet damit in abgekürzter Schreibweise

$$\psi \left(c_1, c_2; \frac{\partial c_1}{\partial \varrho}; \frac{\partial c_2}{\partial \varrho}, \varrho, r_a, r_i \right) = \text{Min} \quad (r_i \leqq \varrho \leqq r_a) . \tag{53}$$

Die Funktion ψ läßt sich explizit angeben, da sämtliche Integrale in (49) und (52) streng auswertbar sind. Durch (47) und (53) sind die Funktionen $c_1(\varrho)$, $c_2(\varrho)$ bestimmt.

Da die Funktion ψ ein Minimum annehmen soll, so muß auch

$$\int_{r_i}^{r_a} \psi \, d\varrho = \text{Min} \tag{54}$$

erfüllt sein. Mit (30) lautet die Bedingung (54)

$$\int_{r_i}^{r_a} \left[\int_{r_i}^{\varrho} \frac{d\sigma_i}{d\varrho} \frac{d\varepsilon_i}{d\varrho} r \, dr \right] d\varrho = \text{Min} \quad (i = r, \varphi, z) . \tag{54a}$$

Die Minimalbedingung (30) sagt aus, daß die durch die Spannungszuwächse und Dehnungszuwächse geleistete Arbeit ein Minimum ist. Entsprechend ist (54a) die Gesamtarbeit der Spannungs- und Dehnungszuwächse, die geleistet wird, wenn der Plastizitätsradius von r_i nach r_a wandert.

Die Differentialgleichung (47) wird in die beiden Gleichungen aufgespalten

$$\frac{(r_a^2 - r_i^2)\, 2\sqrt{3}\, \sigma_p \frac{\varrho}{r_a^2}}{r_i^2 - \frac{2}{3}\frac{r_i^3}{\varrho} - \frac{1}{3}\varrho^2} = \frac{dc_1}{d\varrho} + c_1 \left[\frac{2\varrho}{\varrho^2 - r_i^2} + \frac{2}{\nu} \frac{E \varkappa_1 \varkappa_2}{1 + \varkappa_2} \frac{1}{\varrho} + \frac{r_a^2 - r_i^2 + \frac{2}{3}\frac{r_i^3}{\varrho} - \frac{2}{3}\varrho^2}{r_i^2 \varrho - \frac{2}{3} r_i^3 - \frac{1}{3}\varrho^3} \right], \tag{55}$$

$$\frac{dc_2}{\partial \varrho} + c_2 \left[\frac{2\varrho}{\varrho^2 - r_i^2} + \frac{2}{\nu} \frac{E \varkappa_1 \varkappa_2}{1 + \varkappa_2} \frac{1}{\varrho} + \frac{2(r_a^2 - r_i^2)}{r_i^2 \varrho - \frac{1}{2}\frac{r_i^4}{\varrho} - \frac{1}{2}\varrho^3} + \frac{\frac{r_i^4}{\varrho^3} - \varrho}{r_i^2 - \frac{1}{2}\frac{r_i^4}{\varrho^2} - \frac{1}{2}\varrho^2} \right] = 0 . \tag{56}$$

Mit den Funktionen

$$G_1 = \ln (\varrho^2 - r_i^2) + \frac{2}{\nu} \frac{E \varkappa_1 \varkappa_2}{1 + \varkappa_2} \ln \varrho + \ln \left(r_i^2 - \frac{2}{3} r_i^4 \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{3}\varrho^2 \right) + \int \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_i^2 - \frac{2}{3} r_i^3 \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{3}\varrho^2} \frac{d\varrho}{\varrho} , \tag{57}$$

$$G_2 = \ln (\varrho^2 - r_i^2) + \frac{2}{\nu} E \varkappa_1 \varkappa_2 \ln \varrho + \ln \left(r_i^2 - \frac{1}{2}\frac{r_i^4}{\varrho^2} - \frac{1}{2}\varrho^2 \right) + \int \frac{2(r_a^2 - r_i^2)}{r_i^2 - \frac{1}{2}\frac{r_i^4}{\varrho^2} - \frac{1}{2}\varrho^2} \frac{d\varrho}{\varrho} \tag{58}$$

lauten die Lösungen von (55) und (56)

$$c_1 = e^{-G_1} \int \frac{(r_a^2 - r_i^2)\, 2\sqrt{3}\, \sigma_P \frac{\varrho}{r_a^2}}{r_i^2 - \frac{2}{3}\frac{r_i^3}{\varrho} - \frac{1}{3}\varrho^2}\, e^{G_1}\, d\varrho + \beta_1\, e^{-G_1}\,, \tag{59}$$

$$c_2 = \beta_2\, e^{-G_2}\,. \tag{60}$$

Es wird (59) und (60) in (54) eingesetzt. Die in (59) und (60) auftretenden Integrationskonstanten β_1, β_2 ergeben sich aus der Forderung

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \int_{r_i}^{r_a} \psi(\beta_1, \beta_2, \varrho)\, d\varrho = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \beta_2} \int_{r_i}^{r_a} \psi(\beta_1, \beta_2, \varrho)\, d\varrho = 0\,. \tag{61}$$

4. Zusammenfassung. Auf dem gezeigten Weg wurden die Spannungen $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ berechnet, wobei an Stelle der Veränderlichen r und ϱ die dimensionlosen Größen $x_i = r_i/\varrho$, $x = r/\varrho$ und $x_a = r/\varrho$ in die Rechnung eingeführt wurden. Die Funktion $\Phi(r, \varrho)$ wurde dann für den Bereich

$$0{,}45 \leqq x_i \leqq 1{,}0\,, \qquad 1 \leqq x_a \leqq 2$$

tabuliert. Hierbei zeigte sich, daß der Rechenaufwand bei der Durchrechnung eines Einzelbeispiels nach der Charakteristikenmethode wesentlich geringer ist. Bei der Anlage von Zahlentafeln zur Berechnung von Spannungen für beliebige Durchmesserverhältnisse ergab sich, daß der aufgezeigte Wege zu geringerem Rechenaufwand führt. Für das Beispiel $r_i/r_a = 1/2$ wurden die Rohraufweitungen bestimmt und diese Werte noch durch praktische Versuche nachgeprüft. Hierbei ergab sich, daß die theoretisch bestimmten Rohraufweitungen in dem Streubereich der gemessenen Rohraufweitungen lagen, wobei Messungen an drei Rohren aus demselben Material und demselben Rohrverhältnis durchgeführt wurden. Insbesondere stimmten die theoretischen Rohraufweitungen auch mit den gemessenen Rohraufweitungen überein, wenn das Rohr entlastet wurde und die Restdeformationen bestimmt wurden.

Daraus kann geschlossen werden, daß durch die berücksichtigte lineare Verfestigung die tatsächlichen Verhältnisse außerordentlich gut erfaßt werden.

Der sogenannte Platzdruck eines Rohres kann auf rein rechnerischem Weg nicht erfaßt werden, da für $\varrho = r_a$ die „geometrische Gestalt" des Rohres instabil wird. Bei den Versuchen zeigt sich, wenn der Innendruck über $p_i\,(\varrho = r_a)$ gesteigert wird, daß das Rohr schon bei geringen Überschreitungen aufzubauchen beginnt.

(Eingegangen am 26. März 1954).

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr.-Ing. *Hans Jung*, Stuttgart-N, Robert-Mayer-Str. 66.

Landolt-Börnstein

Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik

Sechste Auflage der „Physikalisch-chemischen Tabellen". Unter vorbereitender Mitwirkung von J. D'Ans, A. Eucken †, G. Joos, W. A. Roth† herausgegeben von **J. Bartels, P. ten Bruggencate, K. H. Hellwege, Kl. Schäfer, E. Schmidt.** In vier Bänden.

Soeben erschien:

IV. Band: **Technik.** In 4 Teilen.

1. Teil: **Stoffwerte und mechanisches Verhalten von Nichtmetallen.** Bearbeitet von R. Bierl, B. Boonstra, E. vom Ende, J. Endell, W. Fritz, R. Houwink, H. R. Jacobi, P.-A. Koch, F. Kollmann, Th. Kristen, C. Kux, P. Lagally, E. Lax, S. Peter, L. Schiller, G. Schinke, H. Schönborn, G. V. Schulz, K. Schuster, C. Schusterius, Ph. Siedler, G. Vogelpohl. Herausgegeben von **E. Schmidt.** Mit 1104 Abbildungen. XVI, 881 Seiten 4°. 1955. In Moleskin DM 288,—

Inhaltsübersicht: **Allgemeines.** Abkürzungsverzeichnis der wichtigsten Zeitschriften. Physikalisch-technische Größen und Gleichungen. Maßsysteme. Einheiten und Umrechnungstafeln. Atomgewichte. Reduktionen auf Normzustände. Dichte des Wassers (luftfrei). Aräometrie. Pyknometrie. Dichten des Quecksilbers in G/cm³ bei dem Druck von 1 Atm. — **Stoffwerte nichtmetallischer fester Stoffe.** Natürliche und künstliche Baustoffe. Organische Naturstoffe (Holz, Papier, Pappe, Zellstoff, Holzschliff). Faserstoffe. Mineralische Kunststoffe (Keramische Stoffe. Gläser). Kunststoffe. Natürlicher und synthetischer Kautschuk. — **Reibung, Viscosität, Verhalten von flüssigen und gasförmigen Stoffen, Akustik.** Reibung und Rollwiderstand. Viscosität (Zähigkeit). Strömung durch Rohre. Umströmung von Körpern bei zweidimensionaler Strömung. Umströmung von Körpern bei räumlicher Strömung. Flotation. Technische Akustik.

Die weiteren Teile des IV. Bandes werden behandeln:

2. Teil: **Eigenschaften der Metalle.**
3. Teil: **Elektrotechnik — Lichttechnik — Röntgentechnik.**
4. Teil: **Wärme.**

Bisher erschienen:

I. Band: **Atom- und Molekularphysik**
1. Teil: **Atome und Ionen,** 1950.
2. Teil: **Molekeln I** (Kerngerüst), 1951.
3. Teil: **Molekeln II** (Elektronenhülle), 1951.
4. Teil: **Kristalle,** 1955.
5. Teil: **Atomkerne und Elementarteilchen,** 1951.

III. Band: **Astronomie und Geophysik** erschien am 21. 12. 1951.

Die weiteren Bände werden folgende Gebiete behandeln:

II. Band: **Eigenschaften der Materie in ihren Aggregatzuständen.** In 6 Teilen. In Vorbereitung.

Jeder Band und Bandteil ist einzeln käuflich.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einführung in die Technische Mechanik

Nach Vorlesungen. Von Dr.-Ing. **István Szabó**, o. Professor der Mechanik an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg. Mit 484 Abbildungen. XII, 383 Seiten Gr.-8°. 1954.

Steif geheftet DM 19,50; Ganzleinen DM 22,50

Inhaltsübersicht: Die Statik des starren Körpers: Einleitung. Die Elemente der Vektorrechnung. Über die Kraft. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Ebene Kräftegruppen am starren Körpr mit nicht gemeinsamem Angriffspunkt. Über Kräftepaar und Moment. Kräftezusammensetzung im Raume. Ebene Statik des starren Körpers. Über den Schwerpunkt. Der statisch bestimmt gelagerte Balken. — **Einige elementare Probleme der Elastizitätstheorie:** Allgemeine Bemerkungen und Gesetze zur Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre. Die elementare Theorie der Balkenbiegung. Flächenmomente zweiten Grades. Die elastische Linie des Balkens. Ergänzungen zur Theorie des Balkens. — **Statik der Systeme starrer Körper:** Systeme aus einer endlichen Anzahl starrer Körper. Ebene Fachwerke. Statik der Systeme aus unendlich vielen starren Körpern (Statik der Seile und Ketten). — **Einführung in die Dynamik:** Kinematische Betrachtungen. Das NEWTONsche Grundgesetz und seine Folgerungen. Kinetik des Schwerpunktes. Über Bewegungswiderstände (Reibung). Die einfachsten Schwingungsprobleme der Mechanik. Über den Stoß. Einblick in die Hydromechanik. Grundgesetze der Ähnlichkeitsmechanik. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Diese Einführung in die Technische Mechanik ist für den Anfänger beim Studium dieser Disziplin bestimmt.

Eine weitgehende vektorische Schreibweise aller bearbeiteten Themen wird durch eine entsprechende Einführung in die Vektorrechnung vorbereitet. Das 1. Kapitel ist der Statik des starren Körpers gewidmet, wo neben allgemeinen Ausführungen über Kräftesysteme die Schwerpunktsberechnung sowie die Schnittlastenermittlung für den Balken zu finden sind. Anschließend werden im 2. Kapitel einige elementare Probleme der Elastizitätstheorie behandelt (Verformungen des Balkens infolge Biegung, Schub und Torsion und die hierbei entstehenden Spannungen). Dazu gehören auch die schiefe Biegung, der Balken auf nachgiebiger Unterlage (und erweiternd daraus der Spannungszustand einer rotationssymmetrisch belasteten Kreiszylinderschale) sowie einige Fälle der Stabknickung. Bei der Torsion wurden hauptsächlich dünnwandige Querschnitte untersucht. Im 3. Kapitel wird ein Überblick über die Statik der Systeme starrer Körper gegeben (verschiedene Berechnungsverfahren für die Ermittlung der Stabkräfte statisch bestimmter Fachwerke und Statik der Seile und Ketten, an die sich das graphische Verfahren von Mohr für die Bestimmung der Biegelinie eines Trägers anschließt). Das 4. Kapitel führt in die Dynamik ein. Hierzu wird, vom Newtonschen Grundgesetz ausgehend, der Schwerpunkts- und Drallsatz formuliert. Neben der speziellen Untersuchung ebener Bewegungsvorgänge wird auch auf die Relativbewegung eingegangen und mit ihrer Hilfe die sog. Kreiselwirkung erläutert. Einen breiten Raum nehmen Ausführungen über Bewegungswiderstände (Reibung) sowie einfache Schwingungsprobleme mit und ohne Dämpfung ein. Neben der Eigenfrequenzermittlung mit näherungsweiser Berücksichtigung der Federmasse findet der Leser hier eine allgemeine Lösung des Problems der erzwungenen gedämpften Schwingungen für beliebige periodische Erregerkraftfunktionen mittels der Methode der harmonischen Analyse. Zu diesem Kapitel gehören weiterhin Ausführungen über den Stoß, plötzliche Fixierungen und Stoßvorgänge an Trägern mit näherungsweiser Berücksichtigung der Trägermaße. Ein besonderer Abschnitt ist der Hydromechanik gewidmet, in dem neben den allgemeinen Eulerschen Bewegungsgleichungen und den daraus resultierenden Folgerungen (Bernoullische Gleichungen, Impulssatz usw.) auch die einfachsten Probleme der Theorie der zähen Flüssigkeiten (Hagen-Poiseuillesches Gesetz, Spaltwasserströmung usw.) behandelt werden. Abschließend folgen die Grundgesetze der Ähnlichkeitsmechanik, wo vor allem auf die Ähnlichkeitsgesetze von Reynolds, Cauchy, Froude eingegangen wird.

Eine große Anzahl von Übungsaufgaben soll zur Vertiefung der dargelegten Zusammenhänge beitragen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 2 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg und 1 Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040.